Introducción a la Teoría de la Información
Primer parcial

4 de abril de 2016

Problema 1 (5 puntos)

Probar que

1. $H(X_1 \dots X_n) \geq \sum_{i=1}^{n} H(X_i | \{X_j : j \neq i\})$,
2. $H(X_1, X_2) + H(X_2, X_3) + H(X_1, X_3) \geq 2H(X_1, X_2, X_3)$.

Sugerencia: Para la parte 2 descomponer $H(X_1, X_2, X_3)$ de tres formas distintas y usar la parte 1.

Solución:

1. $$\begin{aligned} H(X_1 \dots X_n) &= \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_1 \dots X_{i-1}) \\ &\geq \sum_{i=1}^{n} H(X_i | \{X_j : j \neq i\}) \,, \end{aligned}$$

   donde la igualdad es consecuencia de la regla de la cadena y la desigualdad de que condicionar reduce la entropía.

2. Descomponiendo $H(X_1, X_2, X_3)$ de tres formas distintas y sumando obtenemos

   $$\begin{aligned} 3H(X_1, X_2, X_3) &= H(X_1, X_2) + H(X_3 | X_1, X_2) + \\ &\quad H(X_2, X_3) + H(X_1 | X_2, X_3) + \\ &\quad H(X_1, X_3) + H(X_2 | X_1, X_3) \\ &\leq H(X_1, X_2) + H(X_2, X_3) + H(X_1, X_3) + \\ &\quad H(X_1, X_2, X_3) \,, \end{aligned}$$

   donde la desigualdad surge de la parte 1.

Problema 2 (5 puntos)

1. Definir proceso estocástico estacionario.
2. Definir la noción de tasa de entropía basada en entropía condicional vista en clase.
3. Probar que dicha tasa de entropía existe para un proceso estacionario.

Solución:

Ver material teórico.

Problema 3 (5 puntos)

Sea $\{X_i\}_{i>0} \sim \text{Bernulli}(p)$, variables i.i.d. sobre el alfabeto binario $\{0, 1\}$ con $P(X_i = 1) = p$. Definimos el proceso $\{Y_i\}_{i>0}$ de manera que Y_i es la cantidad de unos consecutivos al final de $X_1, \ldots, X_i$, hasta que se encuentra un cero o se alcanza el inicio de la secuencia. Por ejemplo, para $X_1, \ldots, X_6 = 1, 0, 1, 1, 1, 0$ obtenemos $Y_1, \ldots, Y_6 = 1, 0, 1, 2, 3, 0$.

1. ¿Es el proceso $\{Y_i\}_{i>0}$ estacionario?
2. ¿Es un proceso de Markov?
3. Calcule la tasa de entropía de $\{X_i\}_{i>0}$ en función de p.
4. ¿Tiene $\{Y_i\}_{i>0}$ tasa de entropía? En caso afirmativo, ¿Cuánto vale?

Solución:

1. No. Por ejemplo $P(Y_1 > 1) = 0$ pero $P(Y_i > 1) > 0$ para $i > 1$.
2. Sí. Y_{n+1} es igual a Y_n+1 con probabilidad p y 0 con probabilidad $1-p$, independientemente de cuánto valgan $Y_1, \ldots, Y_{n-1}$.

3. Es $H(p)$ porque son variables i.i.d. cada una de ellas con entropía $H(p)$.
4. La tasa de entropía es $H(p)$ con cualquiera de las dos definiciones. En efecto, por un lado tenemos $\frac{1}{n}H(Y_1, \dots, Y_n) = \frac{1}{n}H(X_1, \dots, X_n) = H(p)$ porque hay una relación biyectiva entre las dos secuencias y por otro lado, por la parte 2, tenemos $H(Y_{n+1}|Y_1, \dots, Y_n) = H(p)$.
