Componentes Simétricas

Contenido

1. Representación de magnitudes mediante vectores
2. “Teorema Fundamental de Componentes Simétricas”
3. Algebra de componentes simétricas
   i. Suma
   ii. Producto de un número por un vector
   iii. Conjugación
   iv. Ley de Ohm
   v. Pasaje de un sistema estrellado a un sistema compuesto

1 - Vectores

Vectores: $\vec{V} = (\overline{V}_a, \overline{V}_b, \overline{V}_c)$

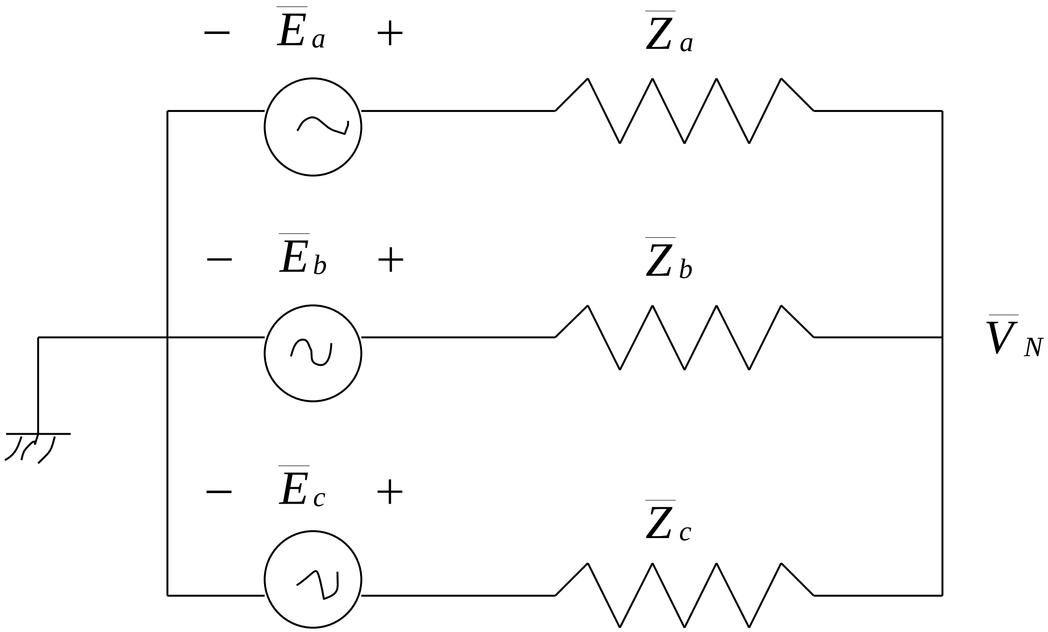
$\overline{V}_a, \overline{V}_b, \overline{V}_c$: Componentes de fase del vector $\vec{V}$

Pueden representar

- Tensión en un punto de un circuito (ej: referida al neutro)
- Tensión entre dos puntos de un circuito
- Corriente por una rama (trifásica)
- Potencia eléctrica consumida por una rama

1 - Vectores

Ejemplo en un Circuito Trifásico:



1 - Vectores

Ejemplos:

$$\vec{E} = (\bar{E}_a, \bar{E}_b, \bar{E}_c)$$

$$\vec{V}_N = (\bar{V}_N, \bar{V}_N, \bar{V}_N)$$

$$\vec{I} = (\bar{I}_a, \bar{I}_b, \bar{I}_c)$$

1 - Vectores

Definición del operador a:

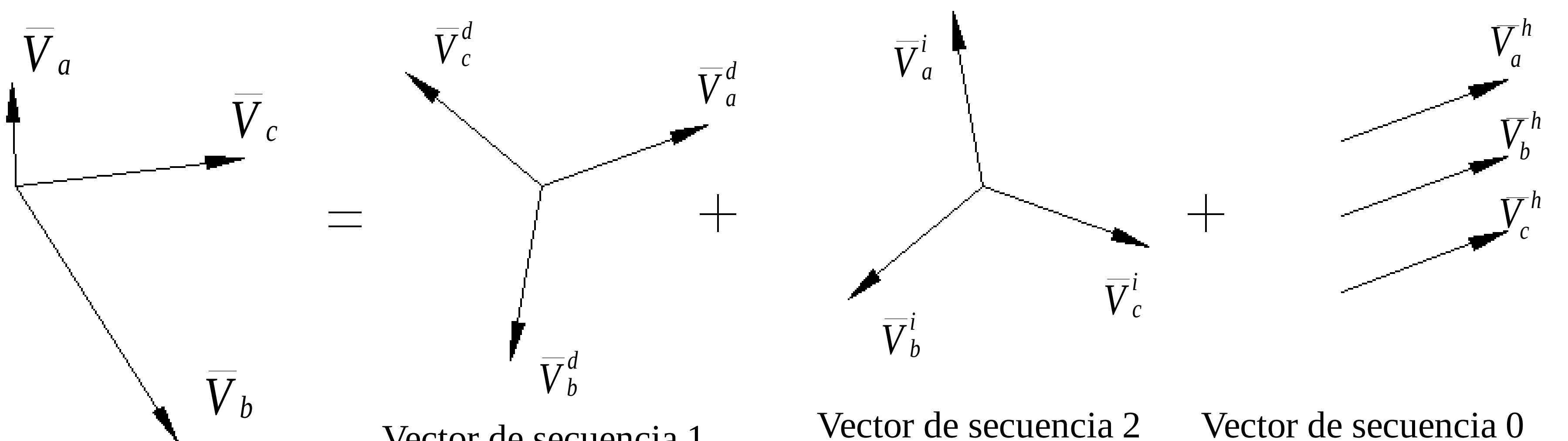
- $a = e^{j120°} = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$

Propiedades

- $a^2 = e^{j240°} = \hat{a} = -\frac{1}{2} - j\frac{\sqrt{3}}{2}$
- $a^3 = 1$
- $1 + a + a^2 = 0$
- $a - a^2 = j\sqrt{3}$

2 – Teorema Fundamental

Dado un vector cualquiera $\vec{V} = (\bar{V}_a, \bar{V}_b, \bar{V}_c)$, se demostrará que el mismo se puede descomponer como suma de tres vectores perfectos.



Vector de secuencia 1 o secuencia "directa"

Vector de secuencia 2 o secuencia "inversa"

Vector de secuencia 0 o secuencia "homopolar"

2 – Teorema Fundamental

Dado $\vec{V} = \begin{pmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} \Longrightarrow \exists\ y\ son$ ú$nicos\ \vec{V}_d, \vec{V}_i, \vec{V}_h$ tal que $\vec{V} = \vec{V}_d + \vec{V}_i + \vec{V}_h$

Con $\vec{V}_d = \bar{V}_d \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$; $\vec{V}_i = \bar{V}_i \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}$; $\vec{V}_h = \bar{V}_h \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Dem:

$$\begin{pmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_h \end{pmatrix} = T_s \vec{V}_s$$

T_s: Transformación de Fortescue o de Componentes Simétricas

$\det(T_s) = 3.(a - a^2) = 3\sqrt{3}j \ \Rightarrow \exists$ correspondencia biunívoca entre $\vec{V}$ y $\vec{V}_s$

2 – Teorema Fundamental

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & a & 1 \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_h \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \bar{V}_a = \bar{V}_d + \bar{V}_i + \bar{V}_h \\ \bar{V}_b = a^2\bar{V}_d + a\bar{V}_i + \bar{V}_h \\ \bar{V}_c = a\bar{V}_d + a^2\bar{V}_i + \bar{V}_h \end{array}$$

$$\vec{V}_s = \begin{pmatrix} \bar{V}_d \\ \bar{V}_i \\ \bar{V}_h \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & a^2 & a \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{c} \bar{V}_d = \frac{1}{3}(\bar{V}_a + a\bar{V}_b + a^2\bar{V}_c) \\ \bar{V}_i = \frac{1}{3}(\bar{V}_a + a^2\bar{V}_b + a\bar{V}_c) \\ \bar{V}_h = \frac{1}{3}(\bar{V}_a + \bar{V}_b + \bar{V}_c) \end{array}$$

Casos particulares:

- $\vec{V}$ de secuencia directa: $\vec{V} = (\bar{V}, a^2\bar{V}, a\bar{V}) \Rightarrow \vec{V}_s = (\bar{V}, 0,0)$
- $\vec{V}$ de secuencia inversa: $\vec{V} = (\bar{V}, a\bar{V}, a^2\bar{V}) \Rightarrow \vec{V}_s = (0, \bar{V}, 0)$
- $\vec{V}$ de secuencia homopolar: $\vec{V} = (\bar{V}, \bar{V}, \bar{V}) \Rightarrow \vec{V}_s = (0,0, \bar{V})$

3 – Operaciones - Suma

Sean $\vec{V} = \begin{pmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{pmatrix}, \vec{U} = \begin{pmatrix} \bar{U}_a \\ \bar{U}_b \\ \bar{U}_c \end{pmatrix}, \vec{V} + \vec{U} = \begin{pmatrix} \bar{V}_a + \bar{U}_a \\ \bar{V}_b + \bar{U}_b \\ \bar{V}_c + \bar{U}_c \end{pmatrix}$

- $\left(\vec{V} + \vec{U}\right)_d = \left(\vec{V}\right)_d + \left(\vec{U}\right)_d = \bar{V}_d + \bar{U}_d$

$\left(\vec{V} + \vec{U}\right)_i = \left(\vec{V}\right)_i + \left(\vec{U}\right)_i = \bar{V}_i + \bar{U}_i$

- $\left(\vec{V} + \vec{U}\right)_h = \left(\vec{V}\right)_h + \left(\vec{U}\right)_h = \bar{V}_h + \bar{U}_h$

3 – Operaciones
Producto de un número por un vector

Sean $\vec{V} = \begin{pmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{pmatrix}$ y α un número complejo, $\alpha\vec{V} = \begin{pmatrix} \alpha\bar{V}_a \\ \alpha\bar{V}_b \\ \alpha\bar{V}_c \end{pmatrix}$

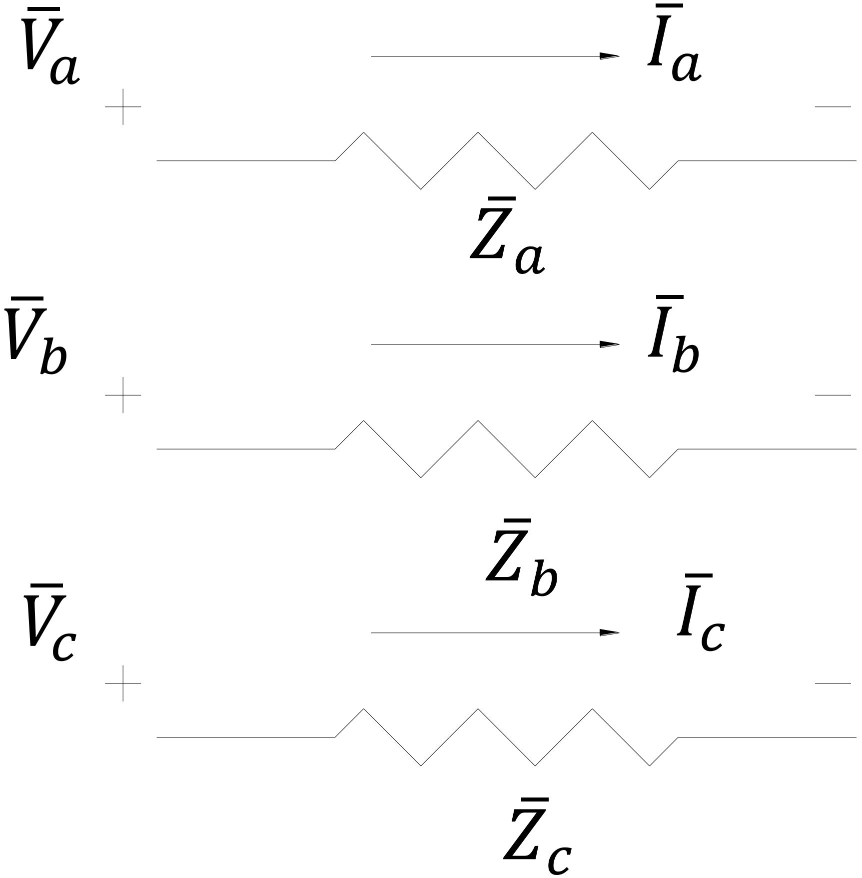
- $\left(\alpha\vec{V}\right)_d = \alpha\left(\vec{V}\right)_d = \alpha\bar{V}_1$
- $\left(\alpha\vec{V}\right)_i = \alpha\left(\vec{V}\right)_i = \alpha\bar{V}_2$
- $\left(\alpha\vec{V}\right)_h = \alpha\left(\vec{V}\right)_h = \alpha\bar{V}_h$

3 – Operaciones
Conjugación

Sea $\vec{V} = \begin{pmatrix} \bar{V}_a \\ \bar{V}_b \\ \bar{V}_c \end{pmatrix}, \ \hat{\vec{\bar{V}}} = \begin{pmatrix} \hat{\bar{V}}_a \\ \hat{\bar{V}}_b \\ \hat{\bar{V}}_c \end{pmatrix}$

- $\left(\hat{\vec{\bar{V}}}\right)_d = \widehat{\left(\vec{\bar{V}}\right)_i} = \hat{\bar{V}}_i$
- $\left(\hat{\vec{\bar{V}}}\right)_i = \widehat{\left(\vec{\bar{V}}\right)_d} = \hat{\bar{V}}_d$
- $\left(\hat{\vec{\bar{V}}}\right)_h = \widehat{\left(\vec{\bar{V}}\right)_h} = \hat{\bar{V}}_h$

3 – Ley de Ohm para impedancia sin acoplamientos



3 – Ley de Ohm para impedancia sin acoplamientos

$$\vec{V} = \overline{Z}_{abc}.\overline{I} = \begin{pmatrix} \overline{V}_a \\ \overline{V}_b \\ \overline{V}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Z}_a & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Z}_b & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Z}_b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overline{I}_a \\ \overline{I}_b \\ \overline{I}_c \end{pmatrix}$$

$$T_s.\vec{V}_{012} = \overline{Z}_{abc}.T_s.\overline{\vec{I}}_{012}$$

$$\vec{V}_{012} = \left(T_s^{-1}\overline{Z}_{abc}.T_s\right).\overline{\vec{I}}_{012}$$

$$\overline{V}_d = \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + \overline{Z}_b + \overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_d + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a^2\overline{Z}_b + a\overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_i + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a\overline{Z}_b + a^2\overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_h$$

$$\overline{V}_i = \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a\overline{Z}_b + a^2\overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_d + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + \overline{Z}_b + \overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_i + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a^2\overline{Z}_b + a\overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_h$$

$$\overline{V}_h = \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a^2\overline{Z}_b + a\overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_d + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a\overline{Z}_b + a^2\overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_i + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + \overline{Z}_b + \overline{Z}_c\right).\overline{\overline{I}}_h$$

3 – Ley de Ohm para impedancia sin acoplamientos

$$\vec{V} = \overline{Z}_{abc}.\overline{I} = \begin{pmatrix} \overline{V}_a \\ \overline{V}_b \\ \overline{V}_c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{Z}_a & 0 & 0 \\ 0 & \overline{Z}_b & 0 \\ 0 & 0 & \overline{Z}_b \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \overline{I}_a \\ \overline{I}_b \\ \overline{I}_c \end{pmatrix}$$

$$T_s.\vec{V}_{012} = \overline{Z}_{abc}.T_s.\overline{\vec{I}}_{012}$$

$$\vec{V}_{012} = \left(T_s^{-1}\overline{Z}_{abc}.T_s\right).\overline{\vec{I}}_{012}$$

$$\overline{V}_d = \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + \overline{Z}_b + \overline{Z}_c\right).\overline{I}_d + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a^2\overline{Z}_b + a\overline{Z}_c\right).\overline{I}_i + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a\overline{Z}_b + a^2\overline{Z}_c\right).\overline{I}_h$$

$$\overline{V}_i = \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a\overline{Z}_b + a^2\overline{Z}_c\right).\overline{I}_d + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + \overline{Z}_b + \overline{Z}_c\right).\overline{I}_i + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a^2\overline{Z}_b + a\overline{Z}_c\right).\overline{I}_h$$

$$\overline{V}_h = \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a^2\overline{Z}_b + a\overline{Z}_c\right).\overline{I}_d + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + a\overline{Z}_b + a^2\overline{Z}_c\right).\overline{I}_i + \frac{1}{3}\left(\overline{Z}_a + \overline{Z}_b + \overline{Z}_c\right).\overline{I}_h$$

3 – Cálculo de Potencia

Potencia Trifásica:

$$\bar{S} = \bar{V}_a \hat{I}_a + \bar{V}_b \hat{I}_b + \bar{V}_c \hat{I}_c$$

$$\bar{S} = \left(\bar{V}_d + \bar{V}_i + \bar{V}_h\right)\left(\hat{I}_d + \hat{I}_i + \hat{I}_h\right) + \left(a^2.\bar{V}_d + a.\bar{V}_i + \bar{V}_h\right)\left(a^2\hat{I}_d + a\hat{I}_i + \hat{I}_h\right)$$
$$+ \left(a.\bar{V}_d + a^2.\bar{V}_i + \bar{V}_h\right)\left(a\hat{I}_d + a^2\hat{I}_i + \hat{I}_h\right)$$

$$\vdots$$

$$\bar{S} = 3.\bar{V}_d \hat{I}_d + 3.\bar{V}_i \hat{I}_i + 3.\bar{V}_h \hat{I}_h$$

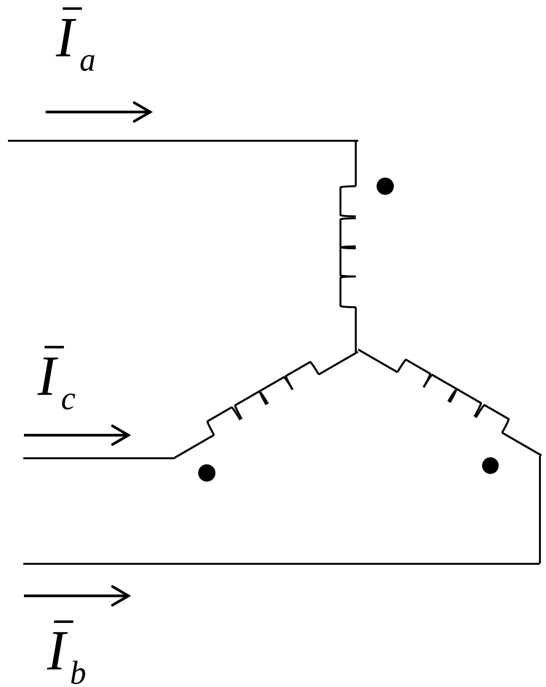
Potencia eléctrica total consumida en la red trifásica directa.

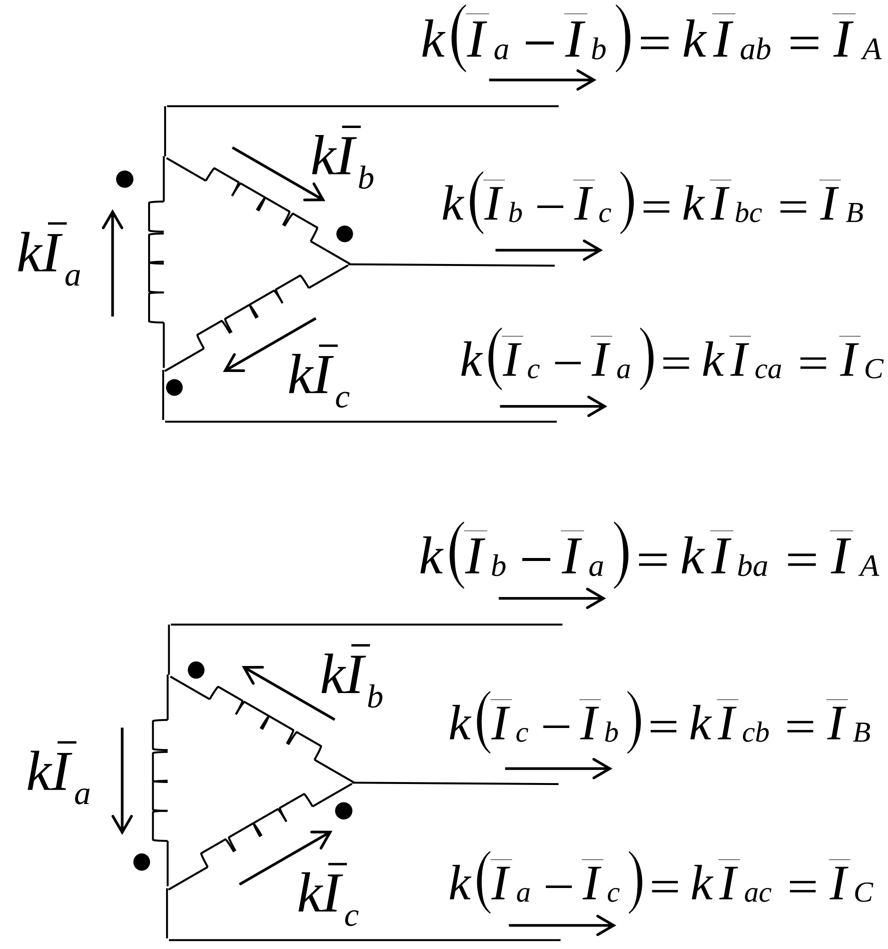
Potencia eléctrica total consumida en la red trifásica inversa.

Potencia eléctrica total consumida en la red trifásica homopolar.

3 – Operaciones

Pasaje Componentes Simétricas de Corriente a través de un transformador





3 – Operaciones

Pasaje Sistema estrellado – Sistema Compuesto

Sea $\vec{I} = (\bar{I}_a, \bar{I}_b, \bar{I}_c)$:

Sistemas compuestos posibles:

$\bar{I}_A = \bar{I}_{ab},\ \bar{I}_B = \bar{I}_{bc},\ \bar{I}_C = \bar{I}_{ca}$

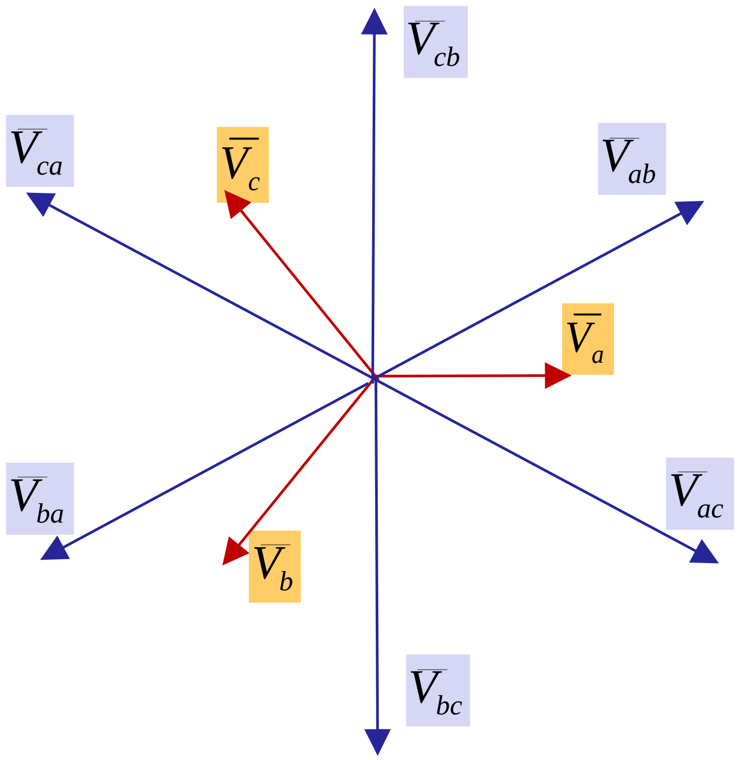
$\bar{I}_A = \bar{I}_{bc},\ \bar{I}_B = \bar{I}_{ca},\ \bar{I}_C = \bar{I}_{ab}$

$\bar{I}_A = \bar{I}_{ca},\ \bar{I}_B = \bar{I}_{ab},\ \bar{I}_C = \bar{I}_{bc}$

$\bar{I}_A = \bar{I}_{ba},\ \bar{I}_B = \bar{I}_{cb},\ \bar{I}_C = \bar{I}_{ac}$

$\bar{I}_A = \bar{I}_{cb},\ \bar{I}_B = \bar{I}_{ac},\ \bar{I}_C = \bar{I}_{ba}$

$\bar{I}_A = \bar{I}_{ac},\ \bar{I}_B = \bar{I}_{ba},\ \bar{I}_C = \bar{I}_{cb}$



3 – Operaciones
Pasaje Sistema estrellado – Sistema Compuesto

Sea $\vec{I}_{est}^{\ S} = (\bar{I}_d, \bar{I}_i, \bar{I}_h)$ comp simétricas de corrientes en la estrella.

Objetivo: calcular comp simétricas de $\vec{I}_{tri}^{\ S} = f(\bar{I}_d, \bar{I}_i, \bar{I}_h)$

Ref	*Sec positiva* $\bar{I}_d^{tri}$	*Sec positiva* $\bar{I}_i^{tri}$	*Sec cero* $\bar{I}_0^{tri}$
AB	$\bar{I}_d^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_d e^{j30°}$	$\bar{I}_i^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_i e^{-j30°}$	$\bar{I}_0^{tri} = 0$
BC	$\bar{I}_d^{tri} = -j\sqrt{3}.\bar{I}_d$	$\bar{I}_i^{tri} = j\sqrt{3}.\bar{I}_i$	$\bar{I}_0^{tri} = 0$
CA	$\bar{I}_d^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_d e^{j150°}$	$\bar{I}_i^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_i e^{-j150°}$	$\bar{I}_0^{tri} = 0$
BA	$\bar{I}_d^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_d e^{-j150°}$	$\bar{I}_i^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_i e^{j150°}$	$\bar{I}_0^{tri} = 0$
CB	$\bar{I}_d^{tri} = j\sqrt{3}.\bar{I}_d$	$\bar{I}_i^{tri} = -j\sqrt{3}.\bar{I}_i$	$\bar{I}_0^{tri} = 0$
AC	$\bar{I}_d^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_d e^{-j30°}$	$\bar{I}_i^{tri} = \sqrt{3}.\bar{I}_i e^{j30°}$	$\bar{I}_0^{tri} = 0$

3 – Operaciones
Pasaje Sistema estrellado – Sistema Compuesto

La elección de la fase de referencia es arbitraria.

- Supongamos
  - sistema definido con referencia AB.
- ¿Qué pasa si?
  - se utilizan las relaciones de la referencia BC
  - se utilizan las relaciones de la referencia CB
- Entonces:
  - Referencia AB
    - $\bar{I}_A = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{j30º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{-j30º}$
    - $\bar{I}_B = a^2\sqrt{3}\bar{I}_d e^{j30º} + a\sqrt{3}\bar{I}_i e^{-j30º} = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{-j90º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{j90º}$
    - $\bar{I}_C = a\sqrt{3}\bar{I}_d e^{j30º} + a^2\sqrt{3}\bar{I}_i e^{-j30º} = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{j150º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{j210º}$

3 – Operaciones

Pasaje Sistema estrellado – Sistema Compuesto

– Referencia BC

- $\bar{I}_A' = -j\sqrt{3}\bar{I}_d + j\sqrt{3}\bar{I}_i = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{-j90º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{j90º} = \bar{I}_B$
- $\bar{I}_B' = -a^2 j\sqrt{3}\bar{I}_d + aj\sqrt{3}\bar{I}_i = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{j150º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{j210º} = \bar{I}_C$
- $\bar{I}_C' = -aj\sqrt{3}\bar{I}_d + a^2 j\sqrt{3}\bar{I}_i = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{j30º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{-j30º} = \bar{I}_A$

– Referencia CB

- $\bar{I}_A'' = j\sqrt{3}\bar{I}_d - j\sqrt{3}\bar{I}_i = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{j90º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{-j90º} = -\bar{I}_B$
- $\bar{I}_B'' = a^2 j\sqrt{3}\bar{I}_d - aj\sqrt{3}\bar{I}_i = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{-j30º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{j30º} = -\bar{I}_C$
- $\bar{I}_C'' = aj\sqrt{3}\bar{I}_d - a^2 j\sqrt{3}\bar{I}_i = \sqrt{3}\bar{I}_d e^{j210º} + \sqrt{3}\bar{I}_i e^{j150º} = -\bar{I}_A$

3 – Operaciones

Pasaje Componentes Simétricas de Corriente a través de un transformador

- Para el curso, se utilizará como referencia la fase CB por simplicidad en las cuentas.

$$\vec{I}_{\Delta} = k\left(\bar{I}_c - \bar{I}_b, \bar{I}_a - \bar{I}_c, \bar{I}_b - \bar{I}_a\right)$$

$$\vec{I}_{\Delta}{}^{S} = \left(jk\sqrt{3}\bar{I}_d, -jk\sqrt{3}\bar{I}_i, 0\right)$$

$$R = k\sqrt{3} \quad \text{relación de transformación}$$

- Multiplicando todos por –j:

$$\vec{I}_{\Delta}{}^{S} = \left(R\bar{I}_d, -R\bar{I}_i, 0\right)$$