Valores Por Unidad

Contenido

1. Definición de valores pu
2. Elección de magnitudes base
3. Cambios de base
4. Representación de transformador de 2 devanados en pu
5. Datos de placa de un generador
6. Valores pu en sistemas trifásicos balanceados
7. Constantes de un curadripolo en pu
8. Choque de bases en redes malladas
9. Modelo de Transformador con cambiadores de tap
10. Representación de un transformador de 3 devanados en pu

Introducción

- Los valores en por unidad (pu) corresponden simplemente a un cambio de escala de las magnitudes principales.
- En Sistemas Eléctricos de Potencia es usual expresar las magnitudes (V, I, S, Z) como proporción de una magnitud base y no en magnitudes físicas.
- En la vida cotidiana estamos acostumbrados a expresar una magnitud cualquiera, X, en por ciento:
  - $x(\%) = \frac{X}{X_{base}}.100$
- El concepto de valor por unidad es el mismo que el de por ciento, pero sin multiplicar por 100.

Definición

- Dada una magnitud $\boldsymbol{X}$ en unidades físicas (V, Ω, A), se define $\boldsymbol{x}$ en pu como:
  - $x(pu) = \frac{X}{X_{base}}$
- Las magnitudes en pu se escriben en minúsculas en general.
- Ejemplo
  - Eligiendo una base de tensión $V_{base} = 150kV$, la magnitud $V = 156kV$ se puede expresar en pu como:
  - $v = \frac{V}{V_{base}} = \frac{156kV}{150kV} = 1.04\ (pu)$
- Notar que un valor en pu no tiene dimensiones.
- Se debe tener cuidado en respetar las dimensiones que tiene el valor base elegido.

Elección de magnitudes base

- Las magnitudes principales son V, S, Z y I.
- Se deben elegir valores base para cada magnitud que se quiera expresar en pu.
- Las bases son magnitudes **reales** que **no** son independientes entre sí:
  - Ley de Ohm:
    - $\bar{V} = \bar{Z}.\bar{I}$ entonces sería conveniente que en pu $\bar{v} = \bar{z}.\bar{\imath}$
    - $V_B = Z_B I_B$
  - *Potencia aparente*
    - $\bar{S} = \bar{V}\hat{I}$ entonces sería conveniente que en pu $\bar{s} = \bar{v}.\hat{\imath}$
    - $S_B = V_B I_B$.
- En general se eligen V_B y S_B, las otras bases quedan determinadas
  - $I_B = \frac{S_B}{V_B}$
  - $Z_B = \frac{V_B^2}{S_B}$
  - $Y_B = \frac{1}{Z_B}$

Potencia Base

- Sólo es posible elegir valores base para la potencia aparente
  - $S = \sqrt{P^2 + Q^2}$ entonces sería conveniente que en pu $s = \sqrt{p^2 + q^2}$
  - $s = \frac{S}{S_B} = \frac{\sqrt{P^2+Q^2}}{S_B} = \sqrt{\frac{P^2}{S_B^2} + \frac{Q^2}{S_B^2}} = \sqrt{\left(\frac{P}{S_B}\right)^2 + \left(\frac{Q}{S_B}\right)^2}\,.$

Cambio de Base

- Dado un valor en 'pu' de una determinada base se requiere conocer el mismo valor en otra base.
- Sean *v*, *i*, *p*, *q* y *z* valores de tensión, corriente, potencia activa, potencia reactiva e impedancia en 'pu' de los valores base V_B y S_B.

- $v = \frac{V}{V_B} \quad \Rightarrow \quad v' = \frac{V}{V_B'} = \frac{V}{V_B'} . \frac{V_B}{V_B} = v . \frac{V_B}{V_B'}$
- $i = \frac{I}{I_B} = I \frac{V_B}{S_B} \quad \Rightarrow \quad i' = \frac{I}{I_B'} = \frac{I}{I_B'} \frac{I_B}{I_B} = i . \frac{I_B}{I_B'} = i \frac{V_B'}{V_B} \frac{S_B}{S_B'}$
- $s = \frac{S}{S_B} \quad \Rightarrow \quad s' = \frac{S}{S_B'} = \frac{S}{S_B'} \frac{S_B}{S_B} = s \frac{S_B}{S_B'}$ *(ídem para p y q)*
- $z = \frac{Z}{Z_B} = \frac{Z S_B}{V_B^2} \quad \Rightarrow \quad z' = \frac{Z}{Z_B'} = \frac{Z}{Z_B'} \frac{Z_B}{Z_B} = z \frac{Z_B}{Z_B'} = z \frac{V_B^2}{V_B'^2} \frac{S_B'}{S_B}$

Valores pu en Sistemas Trifásicos Balanceados

- Las bases para magnitudes trifásicas y monofásicas deben cumplir las relaciones básicas.
- Magnitudes de fase y de línea son:
  - V: tensión de fase
  - U: tensión de línea
  - I: corriente de línea o de fase (equivalente estrella)
  - S_F: potencia aparente monofásica
  - S: potencia aparente trifásica
  - Z: impedancia por fase (equivalente estrella)
- Relaciones:
  - $U = V.\sqrt{3}$
  - $Z = \frac{V}{I} = \frac{U}{\sqrt{3}I}$
  - $S_F = V.I$
  - $S = 3.S_F = 3VI = \sqrt{3}UI$

Valores pu en Sistemas Trifásicos Balanceados

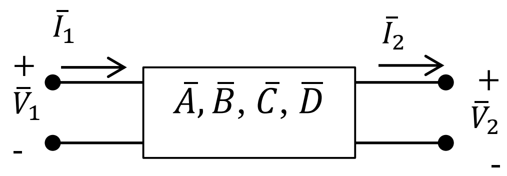
- Eligiendo valores base para tensión compuesta y potencia trifásica
  - $U_B \; y \; S_B$
- El resto de las bases quedarán determinadas
  - $V_B = \frac{U_B}{\sqrt{3}}$
  - $S_{B_F} = \frac{S_B}{3}$
  - $I_B = \frac{S_{B_F}}{V_B} = \frac{S_B}{\sqrt{3}U_B}$
  - $Z_B = \frac{V_B}{I_B} = \frac{U_B}{\sqrt{3}.I_B} = \frac{U_B^2}{S_B}$

Valores pu en Sistemas Trifásicos Balanceados

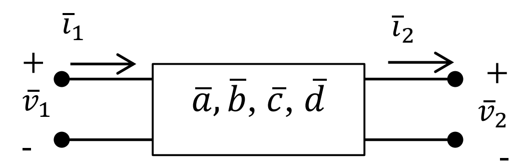
- Relación entre valores pu de fase y de línea:
  - $v = \frac{V}{V_B} = \frac{U}{\sqrt{3}.V_B} = \frac{U}{U_B} = u$
  - $i = \frac{I}{I_B} = \frac{\frac{U}{\sqrt{3}.Z}}{\frac{U_B}{\sqrt{3}.Z_B}} = \frac{u}{z} = \frac{v}{z}$
  - $s = \frac{S}{S_B} = \frac{\sqrt{3}.UI}{\sqrt{3}.U_B I_B} = u.i = v.i$
- **Se concluye** que eligiendo valores base que respeten las relaciones entre magnitudes de fase y de línea:
  - Los valores de fase y de línea en pu son iguales
  - Las relaciones de potencia y corriente en pu no requieren el uso del raíz de 3.

Constantes del Cuadripolo en pu

- El cuadripolo de la figura representa:
  - el modelo de un componente de un sistema monofásico
  - el modelo equivalente por fase de un componente de un sistema trifásico balanceado.
- Ecuaciones del cuadripolo recordando que $\bar{V}$ es tensión fase neutro
  - $\bar{V}_1 = \bar{A}\bar{V}_2 + \bar{B}\bar{I}_2$
  - $\bar{I}_1 = \bar{C}\bar{V}_2 + \bar{D}\bar{I}_2$



- Eligiendo bases V_B y S_{B_F}, cada magnitud se puede escribir en función de su valor en pu.
  - $\bar{v}_1 V_B = \bar{A}\bar{v}_2 V_B + \bar{B}\bar{\imath}_2 \frac{S_{B_F}}{V_B} \Longrightarrow \bar{v}_1 = \bar{A}\bar{v}_2 + \frac{\bar{B}}{V_B^2/S_{B_F}}\bar{\imath}_2 = \bar{a}\bar{v}_2 + \bar{b}\bar{\imath}_2$
  - $\bar{\imath}_1 \frac{S_{B_F}}{V_B} = \bar{C}\bar{v}_2 V_B + \bar{D}\bar{\imath}_2 \frac{S_{B_F}}{V_B} \Longrightarrow \bar{\imath}_1 = \bar{C}\frac{V_B^2}{S_{B_F}}\bar{v}_2 + \bar{D}\bar{\imath}_2 = \bar{c}\bar{v}_2 + \bar{d}\bar{\imath}_2$



- Se concluye que las constantes de un cuadripolo expresadas en pu se calculan de la siguiente manera:
  - $\bar{a} = \bar{A}$ y $\bar{d} = \bar{D}$, no cambian por ser adimensionales
  - $\bar{b} = \bar{B}/Z_B$, se divide por la impedancia base
  - $\bar{c} = \bar{C}.Z_B$, se divide por la admitancia base

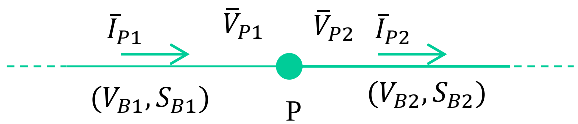
Generadores

- Valores nominales:
  - Potencia aparente nominal
  - Tensión nominal
  - Frecuencia nominal
  - Impedancias en ‘pu’ (valores nominales como bases):
    - Subtransitoria
    - Transitoria
    - Régimen

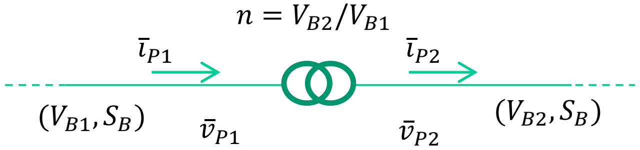
Generadores

- **Ejemplo**: Sea un alternador de 10 MVA, 13,8 kV, reactancia sincrónica $x = 50\%$
  - Reactancia en Ohm:
    - $X(\Omega) = 0.5\,\frac{13.8^2}{10} = 9.522\ \Omega$
  - Reactancia en pu, bases $V_B = 13.8kV,\ S_B = 50MVA$
    - $x'(pu) = 0.5.\frac{50}{10} = 2.5$
  - Reactancia en pu, bases $V_B = 15kV,\ S_B = 50MVA$
    - $x''(pu) = 0.5.\frac{13.8^2}{15^2}\frac{50}{10} = 2.116$ (pu)

Elección de más de un juego de bases

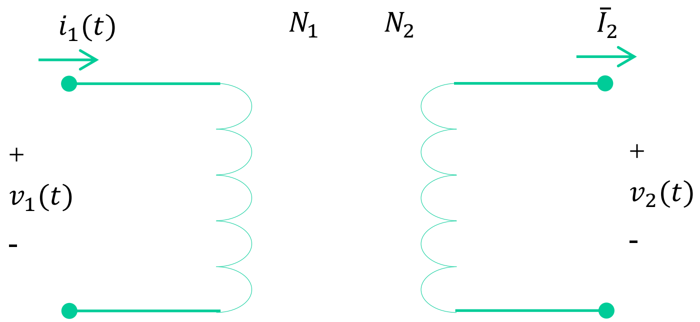


- En el punto P se cumple que:
  - $\bar{V}_{P1} = \bar{V}_{P2} \Rightarrow \bar{v}_{P1}.V_{B1} = \bar{v}_{P2}.V_{B2} \Rightarrow \dfrac{\bar{v}_{P1}}{\bar{v}_{P2}} = \dfrac{V_{B2}}{V_{B1}}$
  - $\bar{I}_{P1} = \bar{I}_{P2} \Rightarrow \dfrac{\bar{\imath}_{P1}}{\bar{\imath}_{P2}} = \dfrac{V_{B1}S_{B2}}{V_{B2}S_{B1}} \xRightarrow{S_{B1}=S_{B2}} \dfrac{\bar{\imath}_{P1}}{\bar{\imath}_{P2}} = \dfrac{V_{B1}}{V_{B2}}.$



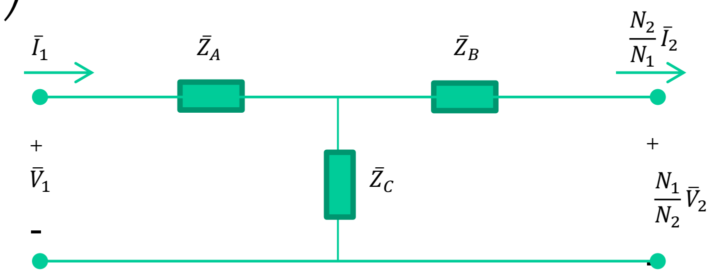
Modelo del transformador en unidades físicas

- Ecuaciones del circuito
  - $v_1(t) = R_{11}.i_1(t) + L_{11}.\frac{di_1(t)}{dt} - M_{12}.\frac{di_2(t)}{dt}$
  - $v_2(t) = -R_{22}.i_2(t) - L_{22}.\frac{di_2(t)}{dt} + M_{21}.\frac{di_1(t)}{dt}$
- L_{ii} y M_{ij} son de la siguiente forma
  - $L_{ii} = \frac{N_i^2}{\Re_i}$
  - $M_{ij} = M_{ji} = \frac{N_i.N_j}{\Re_{ij}}$
- En régimen sinusoidal
  - $\bar{V}_1 = \left(R_{11} + jw\frac{N_1^2}{\Re_1}\right).\bar{I}_1 - jw\frac{N_1N_2}{\Re_{12}}\bar{I}_2$
  - $\bar{V}_2 = -\left(R_{22} + jw\frac{N_2^2}{\Re_2}\right).\bar{I}_2 + jw\frac{N_1N_2}{\Re_{12}}\bar{I}_1$
- En notación matricial
  - $\begin{pmatrix}\bar{V}_1\\ \bar{V}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(R_{11} + jw\frac{N_1^2}{\Re_1}\right) & -jw\frac{N_1N_2}{\Re_{12}}\\ jw\frac{N_1N_2}{\Re_{12}} & -\left(R_{22} + jw\frac{N_2^2}{\Re_2}\right)\end{pmatrix}.\begin{pmatrix}\bar{I}_1\\ \bar{I}_2\end{pmatrix}$

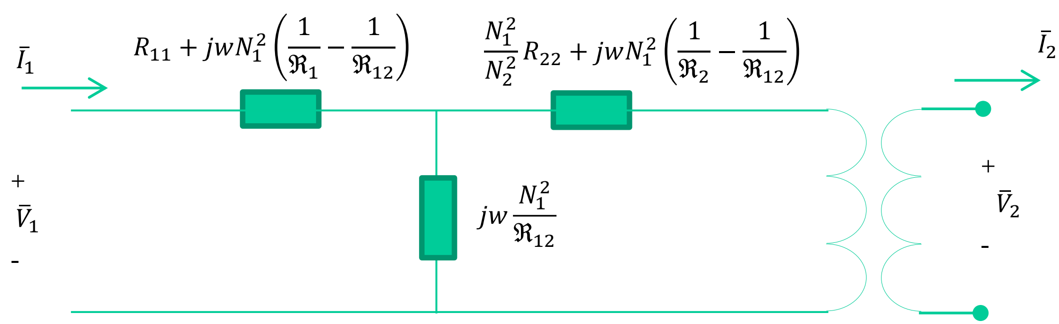


Modelo del transformador en unidades físicas

- Si la ecuación para $\bar{V}_2$ se multiplica por N_1/N_2
  - $$\begin{pmatrix}\bar{V}_1\\ \frac{N_1}{N_2}\bar{V}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(R_{11}+jw\frac{N_1^2}{\Re_1}\right) & -jw\frac{N_1^2}{\Re_{12}}\\ jw\frac{N_1^2}{\Re_{12}} & -\left(\frac{N_1^2}{N_2^2}R_{22}+jw\frac{N_1^2}{\Re_2}\right)\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\bar{I}_1\\ \frac{N_2}{N_1}\bar{I}_2\end{pmatrix}$$
- Estas ecuaciones se pueden asociar al circuito en T

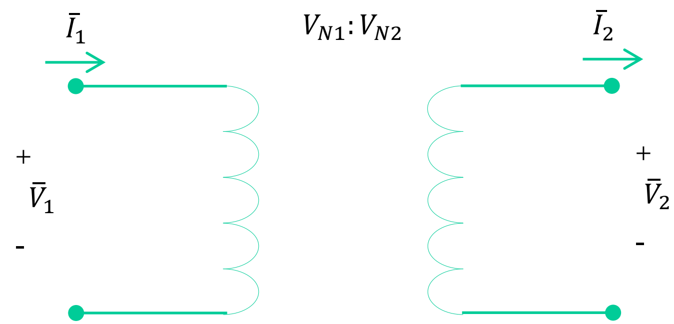


- Haciendo $\bar{I}_2 = 0$
  - $\frac{\frac{N_1}{N_2}\bar{V}_2}{\bar{I}_1} = \bar{Z}_C = jw\frac{N_1^2}{\Re_{12}}$
  - $\frac{\bar{V}_1}{\bar{I}_1} = \bar{Z}_A + \bar{Z}_C = \left(R_{11}+jw\frac{N_1^2}{\Re_1}\right)$, por lo tanto $\bar{Z}_A = R_{11} + jwN_1^2\left(\frac{1}{\Re_1}-\frac{1}{\Re_{12}}\right)$
- Haciendo $\bar{I}_1 = 0$
  - $\frac{\frac{N_1}{N_2}\bar{V}_2}{\frac{N_2}{N_1}\bar{I}_2} = -\bar{Z}_B - \bar{Z}_C = -\left(\frac{N_1^2}{N_2^2}R_{22}+jw\frac{N_1^2}{\Re_2}\right)$ por lo que $\bar{Z}_B = \frac{N_1^2}{N_2^2}R_{22} + jwN_1^2\left(\frac{1}{\Re_2}-\frac{1}{\Re_{12}}\right)$
- El circuito queda entonces

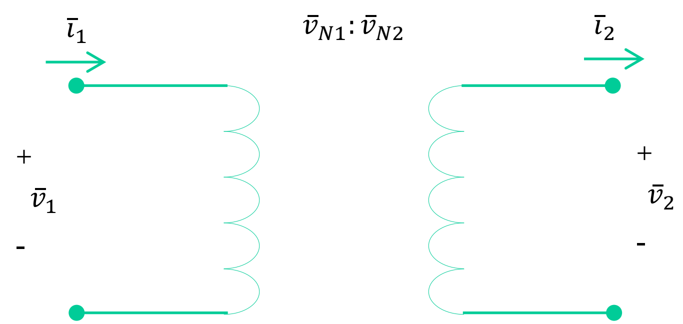


Transformador ideal en pu

- Relaciones en trafo ideal
  - $\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{V_{N1}}{V_{N2}} \Rightarrow \frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{V_{B2}}{V_{B1}}\frac{V_{N1}}{V_{N2}}$
  - $\frac{\bar{I}_1}{\bar{I}_2} = \frac{V_{N2}}{V_{N1}} \xRightarrow{S_{B1}=S_{B2}} \frac{\bar{\imath}_1}{\bar{\imath}_2} = \frac{V_{B1}}{V_{B2}}\frac{V_{N2}}{V_{N1}}$



- En pu
  - $\frac{\bar{v}_1}{\bar{v}_2} = \frac{\bar{v}_{N1}}{\bar{v}_{N2}}$
  - $\frac{\bar{\imath}_1}{\bar{\imath}_2} = \frac{\bar{v}_{N2}}{\bar{v}_{N1}}$



Transformador

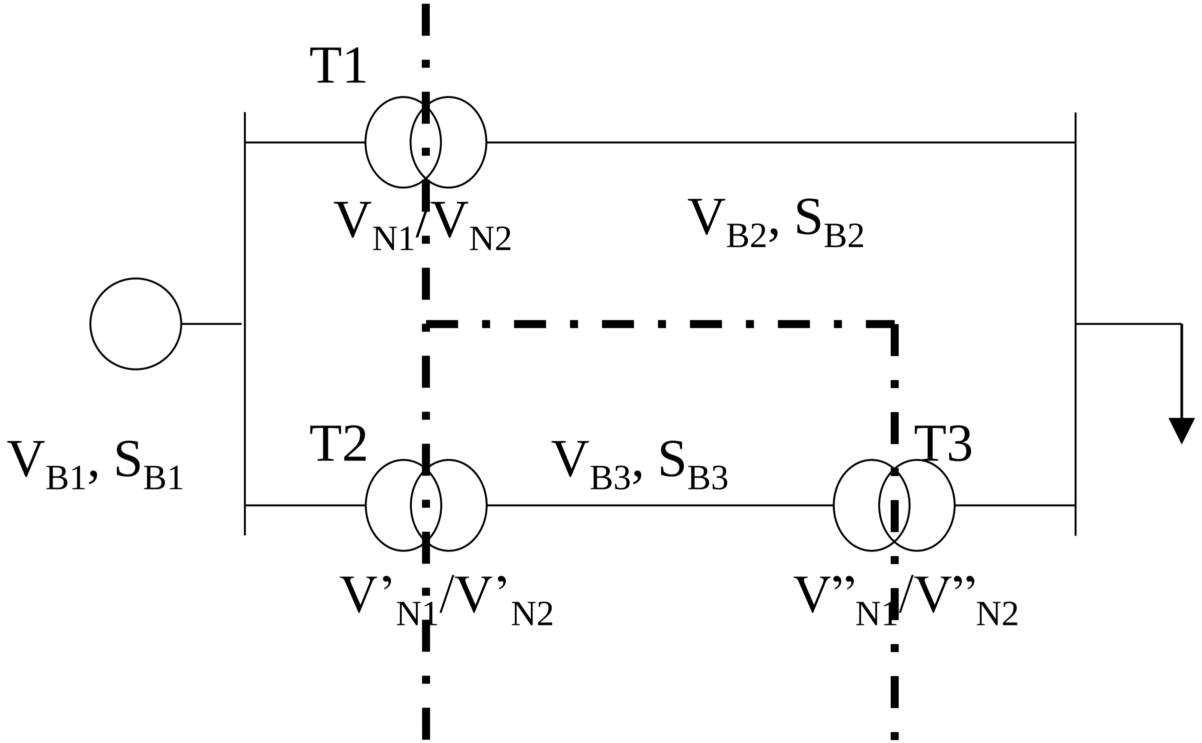
Transformador: Cuando los valores base del lado primario y secundario del transformador cumplen con las ecuaciones:

$$\frac{V_{N1}}{V_{N2}} = \frac{V_{B1}}{V_{B2}}$$

$$S_{B1} = S_{B2}$$

Se puede concluir que en "pu" este puede ser representado por uno de relación de transformación 1:1.

Choque de bases en redes malladas



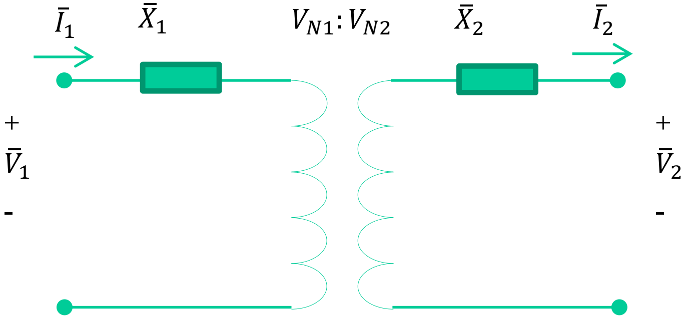
Choque de bases en redes malladas

- $V_{B2} = V_{B1} . \frac{V_{N2}}{V_{N1}} \quad y \quad S_{B2} = S_{B1}$
- $V_{B3} = V_{B1} . \frac{V'_{N2}}{V'_{N1}} \quad y \quad S_{B3} = S_{B1}$
- En T3:
  - $S_{B2} = S_{B3}$ Si
  - ¿$\frac{V_{B3}}{V_{B2}} = \frac{V''_{N1}}{V''_{N2}}$? No necesariamente
  - T3 **<u>no</u>** siempre se podrá representar en pu con relación de transformación 1:1.

Transformador real en pu

Despreciando reactancia de vacío

- Ecuación del circuito
  - $(\bar{V}_1 - \bar{X}_1.\bar{I}_1).\frac{V_{N2}}{V_{N1}} - \bar{X}_2.\bar{I}_2 = \bar{V}_2$



- Expresando $I_1 = I_2.\frac{V_{N2}}{V_{N1}}$ se obtiene,
  - $\bar{V}_1.\frac{V_{N2}}{V_{N1}} = \left(\bar{X}_1.\frac{V_{N2}^2}{V_{N1}^2} + \bar{X}_2\right).\bar{I}_2 + \bar{V}_2$

- Definiendo valores bases V_{B1}, V_{B2}, S_B
  - $\bar{v}_1.V_{B1}\frac{V_{N2}}{V_{N1}} = \left(\bar{X}_1.\frac{V_{N2}^2}{V_{N1}^2} + \bar{X}_2\right).\bar{\iota}_2.\frac{S_B}{V_{B2}} + \bar{v}_2.V_{B2}$

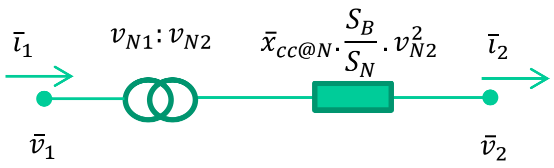
- Dividiendo ambos lados por V_{B2},
  - $\bar{v}_1.\frac{\bar{v}_{N2}}{\bar{v}_{N1}} = \left(\bar{X}_1.\frac{V_{N2}^2}{V_{N1}^2} + \bar{X}_2\right).\bar{\iota}_2.\frac{S_B}{V_{B2}^2} + \bar{v}_2$ (copiar en el pizarrón)

Transformador real en pu

Despreciando reactancia de vacío

- El término entre paréntesis es la reactancia de cortocircuito @ nivel de tensión del secundario, $\bar{X}_{cc@V_{N2}}$
  - $\bar{v}_1 . \frac{\bar{v}_{N2}}{\bar{v}_{N1}} = \frac{\bar{X}_{cc@V_{N2}}}{V_{B2}^2/S_B} . \bar{\imath}_2 + \bar{v}_2$
  - $\bar{v}_1 . \frac{\bar{v}_{N2}}{\bar{v}_{N1}} = \bar{x}_{cc} . \bar{\imath}_2 + \bar{v}_2$
  - $\bar{x}_{cc} = \frac{\bar{X}_{cc@V_{N2}}}{V_{B2}^2/S_B} . \frac{\left(V_{N2}^2/S_N\right)}{\left(V_{N2}^2/S_N\right)} = \bar{x}_{cc@N} . \frac{\left(V_{N2}^2/S_N\right)}{V_{B2}^2/S_B}$

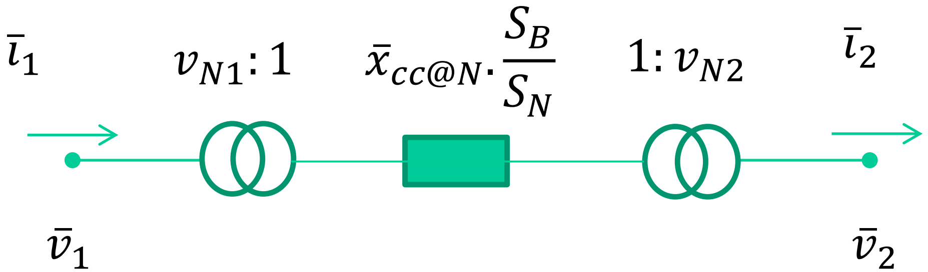
- Reescribiendo la ecuación del circuito
  - $\bar{v}_1 . \frac{v_{N2}}{v_{N1}} = \left(\bar{x}_{cc@N} . \frac{S_B}{S_N} . v_{N2}^2\right) . \bar{\imath}_2 + \bar{v}_2$



Transformador real en pu

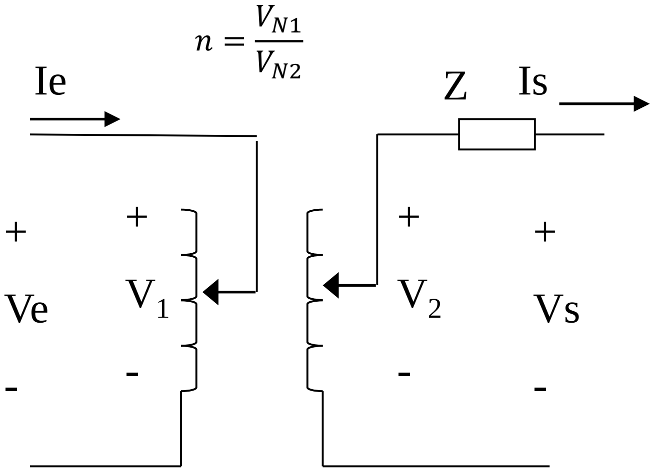
- Dividiendo por v_{N2}

$$-\ \bar{v}_1.\frac{1}{v_{N1}} = \left(\bar{x}_{cc@N}.\frac{S_B}{S_N}\right).v_{N2}.\bar{\imath}_2 + \bar{v}_2.\frac{1}{v_{N2}}$$



Representación del cambiador de puntos de un transformador

- Trafo de tensiones nominales V_{N10}/V_{N20}, (N_{10}/N_{20}) con cambiador de puntos, operando con:
  - nº espiras primario: $N_{10} + \Delta N_1 = N_1$
  - nº espiras secundario: $N_{20} + \Delta N_2 = N_2$
- Sean V_{N1} y V_{N2} tal que $\frac{V_{N1}}{V_{N2}} = \frac{N_1}{N_2}$ para cualquier ΔN_i
- $V_2 = V_1 . \frac{N_{20}+\Delta N_2}{N_{10}+\Delta N_1} = V_1 . \frac{N_2}{N_1} = V_1 . \frac{V_{N2}}{V_{N1}}$

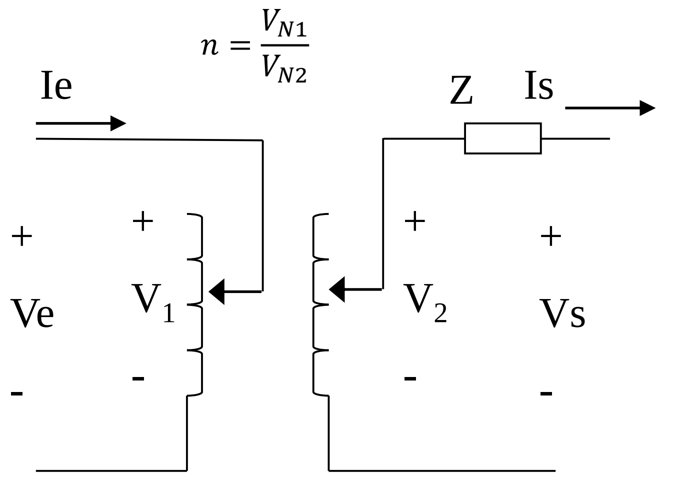


Variación de la reactancia con el punto de operación

- Si se conoce el valor de la impedancia para cada punto del transformador, el modelo del mismo es el visto.
- Si no, se puede asumir
  - $X_i[\Omega] = k_i.N_i^2$
- las reactancias se pueden escribir en función del valor correspondiente al punto nominal
  - $X_1[\Omega] = k_1.N_1^2 = k_1.N_{10}^2.\frac{N_1^2}{N_{10}^2} = X_{10}.\frac{V_{N1}^2}{V_{N10}^2}$
  - $X_2[\Omega] = k_2.N_2^2 = k_2.N_{20}^2.\frac{N_2^2}{N_{20}^2} = X_{20}.\frac{V_{N2}^2}{V_{N20}^2}$
- se puede reescribir la definición de $\bar{x}_{cc@N}(pu) = \frac{\left(\bar{X}_1.\frac{V_{N2}^2}{V_{N1}^2}+\bar{X}_2\right)}{\left(V_{N2}^2/S_N\right)} = \frac{\bar{X}_{cc@V_{N2}}}{\left(V_{N2}^2/S_N\right)}$
  - $\bar{x}_{cc@N}(pu) = \frac{\left(\bar{X}_{10}.\frac{V_{N1}^2}{V_{N10}^2}.\frac{V_{N2}^2}{V_{N1}^2}+\bar{X}_{20}.\frac{V_{N2}^2}{V_{N20}^2}\right)}{\left(V_{N2}^2/S_N\right)} = \frac{\left(\bar{X}_{10}.\frac{V_{N20}^2}{V_{N10}^2}+\bar{X}_{20}\right)}{\left(V_{N20}^2/S_N\right)} = \frac{\bar{X}_{cc0@V_{N2}}}{\left(V_{N20}^2/S_N\right)}$
- Bajo estas hipótesis, el valor de la reactancia de cortocircuito expresada en pu de las tensiones nominales y potencia nominal es constante e independiente del punto de trabajo.

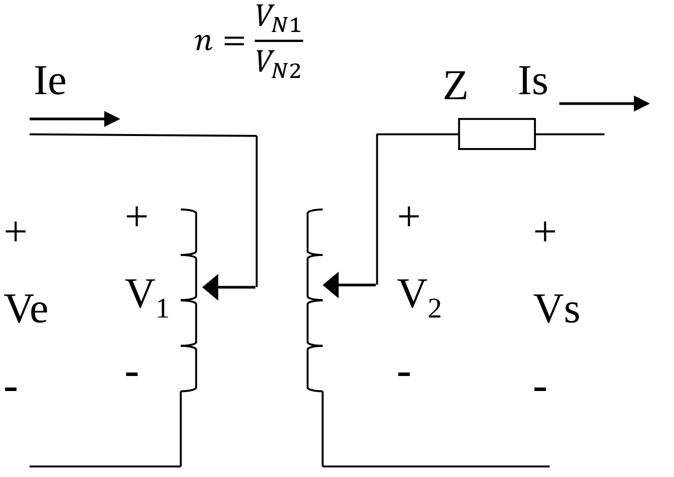
Representación de un transformador como cuadripolo

- Sean V_{B1} y V_{B2} las bases de tensión de primario y secundario.
- $v_1 = \frac{V_1}{V_{B1}}$
- $v_2 = \frac{V_2}{V_{B2}} = \frac{V_1}{V_{B2}} . \frac{V_{N2}}{V_{N1}} = \frac{v_1 V_{B1}}{V_{B2}} \frac{V_{N2}}{V_{N1}} = v_1 . \frac{v_{N2}}{v_{N1}}$
  - $\bar{v}_e \frac{v_{N2}}{v_{N1}} = \bar{\imath}_s . \bar{z} + \bar{v}_s$
  - $\bar{\imath}_e = \frac{v_{N2}}{v_{N1}} \bar{\imath}_s$

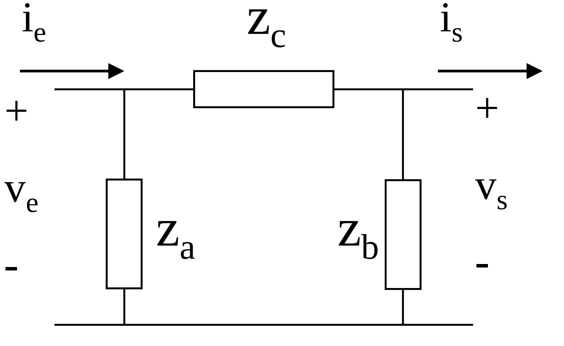


Representación de un transformador como cuadripolo

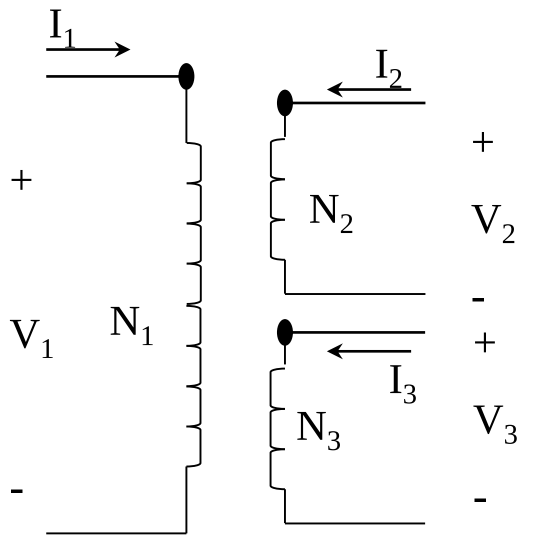
- $$\begin{cases} \bar{v}_e = \dfrac{v_{N1}}{v_{N2}}\bar{v}_s + \bar{z}.\dfrac{v_{N1}}{v_{N2}}\bar{\iota}_s \\ \bar{\iota}_e = 0.\bar{v}_s + \dfrac{v_{N2}}{v_{N1}}\bar{\iota}_s \end{cases}$$



- $$\begin{cases} \bar{z}_a = \dfrac{\bar{z}\frac{v_{N1}}{v_{N2}}}{\frac{v_{N2}}{v_{N1}}-1} \\ \bar{z}_b = \dfrac{\bar{z}}{1-\frac{v_{N2}}{v_{N1}}} \\ \bar{z}_c = \dfrac{\bar{z}}{\frac{v_{N2}}{v_{N1}}} \end{cases}$$



Transformador de 3 devanados



- Representación de un transformador monofásico de 3 devanados.
- Despreciando la rama magnetizante, las ecuaciones que representan el circuito son las siguientes:
  - $\begin{pmatrix} \bar{V}_1 \\ \bar{V}_2 \\ \bar{V}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \bar{I}_3 \end{pmatrix}$
  - $N_1\bar{I}_1 + N_2\bar{I}_2 + N_3\bar{I}_3 = 0$
  - $\bar{Z}_{12} = \bar{Z}_{21}; \quad \bar{Z}_{13} = \bar{Z}_{31}; \quad \bar{Z}_{23} = \bar{Z}_{32}$
  - Donde
    - $\bar{Z}_{ii} = R_i + jwL_{ii}$
    - $\bar{Z}_{ij} = jwM_{ij}$

Transformador de 3 devanados

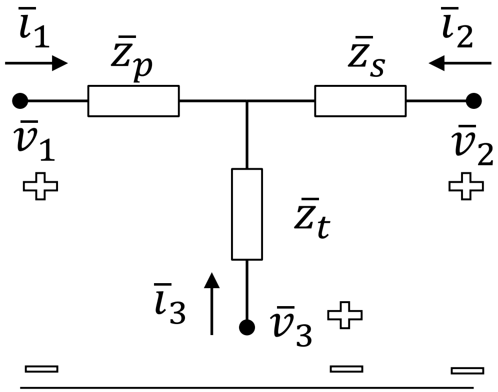
- Se elijen bases con el mismo criterio que para un trafo de 2 devanados:
  - $\frac{V_{B1}}{V_{B2}} = \frac{N_1}{N_2}; \quad \frac{V_{B1}}{V_{B3}} = \frac{N_1}{N_3}; \quad \mathrm{S_{B1}} = \mathrm{S_{B2}} = \mathrm{S_{B3}} = \mathrm{S_B}$
- $N_1\bar{I}_1 + N_2\bar{I}_2 + N_3\bar{I}_3 = 0$
  - $N_1\frac{S_B}{V_{B1}}\bar{\imath}_1 + N_2\frac{S_B}{V_{B2}}\bar{\imath}_2 + N_3\frac{S_B}{V_{B3}}\bar{\imath}_3 = 0$
  - $N_1\frac{S_B}{V_{B1}}\left(\bar{\imath}_1 + \frac{N_2}{N_1}\frac{V_{B1}}{V_{B2}}\bar{\imath}_2 + \frac{N_3}{N_1}\frac{V_{B1}}{V_{B3}}\bar{\imath}_3\right) = 0$
  - $\bar{\imath}_1 + \bar{\imath}_2 + \bar{\imath}_3 = 0 \quad \boldsymbol{ec1}$

Transformador de 3 devanados

- $$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 V_{B1} \\ \bar{v}_2 V_{B2} \\ \bar{v}_3 V_{B3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} & \bar{Z}_{12} & \bar{Z}_{13} \\ \bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \bar{Z}_{23} \\ \bar{Z}_{31} & \bar{Z}_{32} & \bar{Z}_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \bar{\imath}_1 \frac{S_B}{V_{B1}} \\ \bar{\imath}_2 \frac{S_B}{V_{B2}} \\ \bar{\imath}_3 \frac{S_B}{V_{B3}} \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{Z}_{11} \frac{S_B}{V_{B1}^2} & \bar{Z}_{12} \frac{S_B}{V_{B1} V_{B2}} & \bar{Z}_{13} \frac{S_B}{V_{B1} V_{B3}} \\ \bar{Z}_{21} \frac{S_B}{V_{B1} V_{B2}} & \bar{Z}_{22} \frac{S_B}{V_{B2}^2} & \bar{Z}_{23} \frac{S_B}{V_{B2} V_{B3}} \\ \bar{Z}_{31} \frac{S_B}{V_{B1} V_{B3}} & \bar{Z}_{32} \frac{S_B}{V_{B2} V_{B3}} & \bar{Z}_{33} \frac{S_B}{V_{B3}^2} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \bar{\imath}_1 \\ \bar{\imath}_2 \\ \bar{\imath}_3 \end{pmatrix}$$
- $$\begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \bar{v}_2 \\ \bar{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{z}_{11} & \bar{z}_{12} & \bar{z}_{13} \\ \bar{z}_{21} & \bar{z}_{22} & \bar{z}_{23} \\ \bar{z}_{31} & \bar{z}_{32} & \bar{z}_{33} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \bar{\imath}_1 \\ \bar{\imath}_2 \\ \bar{\imath}_3 \end{pmatrix} \quad \boldsymbol{ec2}$$

Transformador de 3 devanados

- $\bar{z}_{ii} = \bar{Z}_{ii}.\frac{S_B}{V_{Bi}^2}$ y $\bar{z}_{ij} = \bar{Z}_{ij}.\frac{S_B}{V_{Bi}V_{Bj}}$
- Se sigue cumpliendo que $\bar{z}_{ij} = \bar{z}_{ji}$
- Objetivo:
  - Encontrar un circuito que represente las ecuaciones anteriores.
- Se plantea el circuito de la figura:
  - Cumple con la ec1 de manera directa.
  - Definiendo las impedancias $(\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}_3)$ de manera que cumplan con la ec2 se logra una representación perfecta de las ecuaciones 1 y 2.



Transformador de 3 devanados

- Haciendo $\bar{\imath}_3 = 0$:
  - En ec1 y en circuito: $\bar{\imath}_1 = -\bar{\imath}_2$
  - En ec2: $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = (\bar{z}_{11} + \bar{z}_{22} - 2\bar{z}_{21})\bar{\imath}_1$
  - En circuito: $\bar{v}_1 - \bar{v}_2 = \bar{z}_p\bar{\imath}_1 - \bar{z}_s\bar{\imath}_2 = (\bar{z}_p + \bar{z}_s)\bar{\imath}_1 = \bar{z}_{ps}\bar{\imath}_1$
  - Entonces: $\bar{z}_p + \bar{z}_s = \bar{z}_{ps} = \bar{z}_{11} + \bar{z}_{22} - 2\bar{z}_{21}$
- Haciendo $\bar{\imath}_2 = 0$:
  - En ec1 y en circuito: $\bar{\imath}_1 = -\bar{\imath}_3$
  - En ec2: $\bar{v}_1 - \bar{v}_3 = (\bar{z}_{11} + \bar{z}_{33} - 2\bar{z}_{31})\bar{\imath}_1$
  - En circuito: $\bar{v}_1 - \bar{v}_3 = \bar{z}_p\bar{\imath}_1 - \bar{z}_t\bar{\imath}_3 = (\bar{z}_p + \bar{z}_t)\bar{\imath}_1 = \bar{z}_{pt}\bar{\imath}_1$
  - Entonces: $\bar{z}_p + \bar{z}_t = \bar{z}_{pt} = \bar{z}_{11} + \bar{z}_{33} - 2\bar{z}_{31}$
- Haciendo $\bar{\imath}_1 = 0$:
  - Entonces: $\bar{z}_s + \bar{z}_t = \bar{z}_{st} = \bar{z}_{22} + \bar{z}_{33} - 2\bar{z}_{23}$

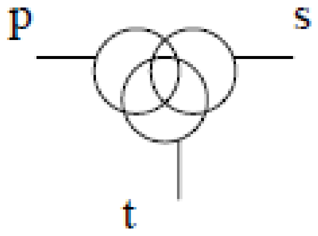
Transformador de 3 devanados

- Impedancias del circuito equivalente:
  - $\bar{z}_p = \frac{\bar{z}_{ps}+\bar{z}_{pt}-\bar{z}_{st}}{2} = \bar{z}_{11} + \bar{z}_{23} - \bar{z}_{21} - \bar{z}_{31}$
  - $\bar{z}_s = \frac{\bar{z}_{ps}+\bar{z}_{st}-\bar{z}_{pt}}{2} = \bar{z}_{22} + \bar{z}_{31} - \bar{z}_{21} - \bar{z}_{23}$
  - $\bar{z}_t = \frac{\bar{z}_{pt}+\bar{z}_{st}-\bar{z}_{ps}}{2} = \bar{z}_{33} + \bar{z}_{21} - \bar{z}_{31} - \bar{z}_{23}$
- Las impedancias de la ec2 representan inductancias propias y mutuas. Están asociadas a elementos físicos.
- Las impedancias $\bar{z}_{ps}$, $\bar{z}_{pt}$ y $\bar{z}_{st}$ representan la impedancia de fugas entre los bobinados (o impedancias de cortocircuito).
- Las impedancias $\bar{z}_p$, $\bar{z}_s$ y $\bar{z}_t$ se pueden calcular en función de las impedancias de fugas y se utilizan en el circuito equivalente. Sin embargo no tienen sentido físico.

Transformador de 3 devanados

- En el curso se despreciará la resistencia de los bobinados: $\bar{z}_p = jX_p$, ídem para s y t.
- Las impedancias de fugas se pueden calcular en base a ensayos de cortocircuito:
  - $\bar{z}_{ps} = \frac{\bar{v}_1}{\bar{\imath}_1}$ para $\bar{\imath}_3 = 0$ y $\bar{v}_2 = 0$
  - $\bar{z}_{pt} = \frac{\bar{v}_1}{\bar{\imath}_1}$ para $\bar{\imath}_2 = 0$ y $\bar{v}_3 = 0$
  - $\bar{z}_{st} = \frac{\bar{v}_2}{\bar{\imath}_2}$ para $\bar{\imath}_3 = 0$ y $\bar{v}_1 = 0$

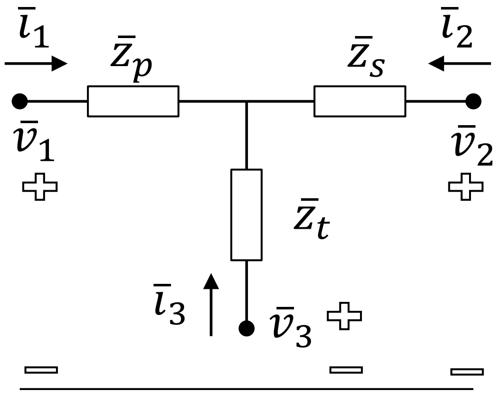
Transformador de 3 devanados

- Símbolo unifilar: 

- Datos de chapa:
  - U_p: Tensión nominal primario
  - U_s : Tensión nominal secundario
  - U_t : Tensión nominal terciario
  - S_p: Potencia nominal primario
  - S_s : Potencia nominal secundario
  - S_t : Potencia nominal terciario
  - X_{ps} : Reactancia cc entre bornes p y s con t abierto
  - X_{pt} : Reactancia cc entre bornes p y t con s abierto
  - X_{st} : Reactancia cc entre bornes s y t con p abierto

Transformador de 3 devanados

- Modelo equivalente cuando todas las reactancias están al mismo nivel de tensión o en pu:



- Donde:
  - $\bar{z}_{ps} = \bar{z}_p + \bar{z}_s$
  - $\bar{z}_{pt} = \bar{z}_p + \bar{z}_t$
  - $\bar{z}_{st} = \bar{z}_s + \bar{z}_t$
- Resolviendo para $\bar{z}_p$, $\bar{z}_s$ y $\bar{z}_t$:
  - $\bar{z}_p = \frac{\bar{z}_{ps}+\bar{z}_{pt}-\bar{z}_{st}}{2}$
  - $\bar{z}_s = \frac{\bar{z}_{ps}+\bar{z}_{st}-\bar{z}_{pt}}{2}$
  - $\bar{z}_t = \frac{\bar{z}_{pt}+\bar{z}_{st}-\bar{z}_{ps}}{2}$