Repaso

Contenido

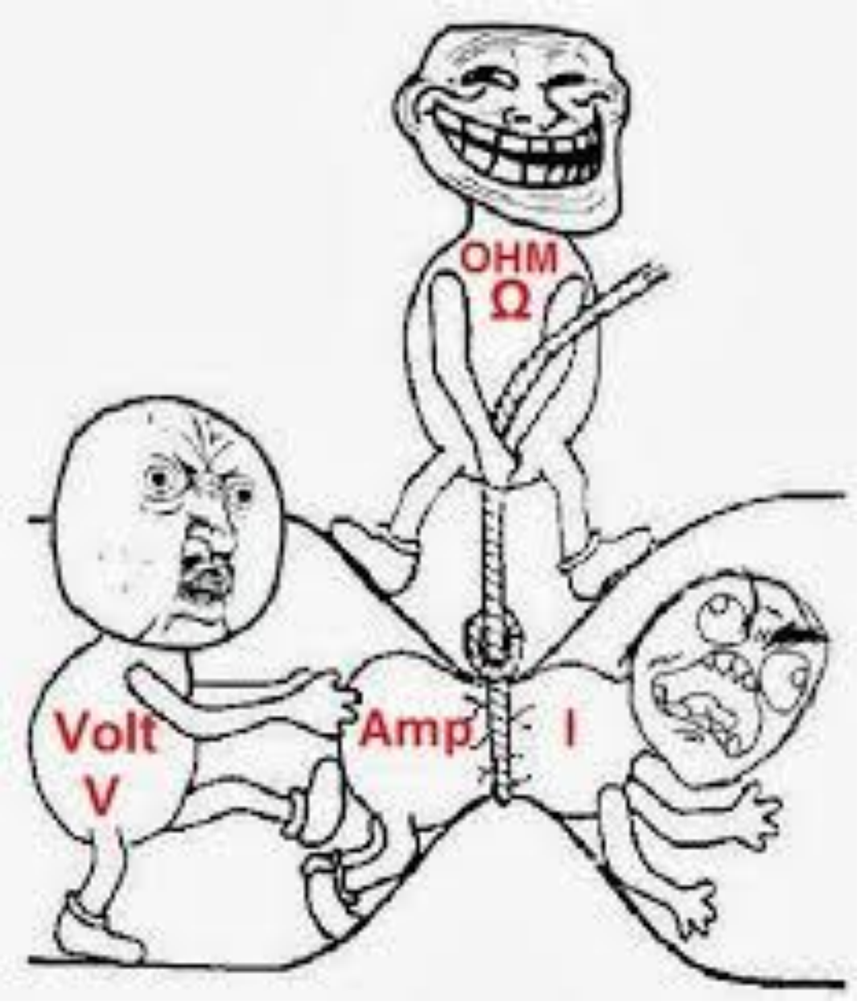
1. Notación Fasorial
2. Ley de Ohm
3. Potencia y potencia compleja
4. Sistemas Trifásicos
5. Diagramas Unifilares
6. Modelos básicos
   a) Generadores
   b) Transformadores
   c) Cargas

Fasores

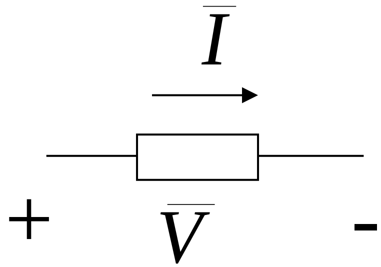
Notación fasorial

- Hipótesis de Trabajo:
  - Circuitos lineales en régimen permanente
  - Señales de excitación sinusoidales de la forma $v(t) = V_{max}.\cos(wt + \theta_v)$
  - Respuestas también sinusoidales de la forma $i(t) = I_{max}.\cos(wt + \theta_i)$
- Fórmula de Euler: $e^{jx} = \cos(x) + j.sen(x)$
- Se puede reescribir la señal de excitación y la respuesta como:
  - $v(t) = Re\left(V_{max}.e^{j(wt+\theta_v)}\right) = Re\left(\sqrt{2}.V_{rms}.e^{j(wt+\theta_v)}\right)$
  - $i(t) = Re\left(I_{max}.e^{j(wt+\theta_i)}\right) = Re\left(\sqrt{2}.I_{rms}.e^{j(wt+\theta_i)}\right)$
- Se definen los fasores de v(t) e i(t) como $\bar{V}$ e $\bar{I}$ tal que:
  - $\bar{V} = V_{rms}.e^{j\theta_v}$
  - $\bar{I} = I_{rms}.e^{j\theta_i}$
- El fasor no es un vector, ni rota, es simplemente un número complejo con las mismas dimensiones que las señales en el tiempo.
- Notar que está implícito en la definición una única frecuencia w constante.

Ley de Ohm



Ley de Ohm



$$\overline{Z} = Ze^{j\theta}$$

Figura 1

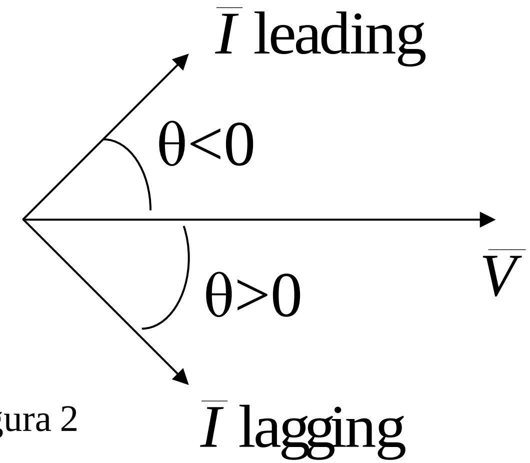


Figura 2

- Ley de Ohm $\bar{I} = \frac{\bar{V}}{\bar{Z}} = \frac{V.e^{0j}}{Ze^{j\theta}} = \frac{V}{Z}.e^{-j\theta}$
- El origen de fases es arbitrario. En esta definición se toma el fasor V como origen de fases: $\bar{V} = V_{<0º} = V$
- θ>0, corriente atrasa a la tensión
- θ<0, corriente adelanta a la tensión
- Notar que $\bar{Z} = \frac{\bar{V}}{\bar{I}}$ tiene características de fasor (número complejo) si bien no tiene sentido asociarlo a una señal en el tiempo.

Potencia


ENTENDIENDO EL
FACTOR DE POTENCIA
kVAR
kVA
kW
POTENCIA
REACTIVA
POTENCIA
REAL
Energía
desaprovechada
Energía
utilizada

Potencia

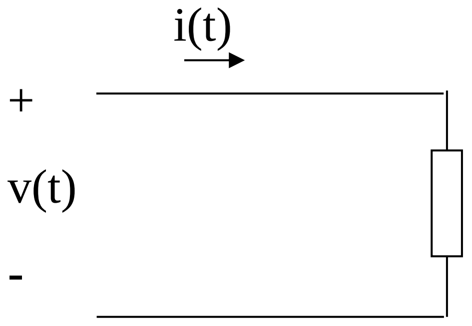


Figura 3

$$v(t) = V_p \cos(wt) \;\; e \;\; i(t) = I_p \cos(wt + \theta)$$

$$p(t) = V_p I_p \cos(wt) \cos(wt + \theta)$$

$\vdots$

Haciendo cuentas

$\vdots$

$$p(t) = \underbrace{\frac{V_p}{\sqrt{2}} \frac{I_p}{\sqrt{2}} \cos(\theta) \, . \, [1 + \cos(2wt)]}_{\substack{p_R(t) \\ Energía\ que\ fluye \\ hacia\ el\ circuito}} + \underbrace{\frac{V_p}{\sqrt{2}} \frac{I_p}{\sqrt{2}} sen(\theta)\, sen(2wt)}_{\substack{p_x(t) \\ Energía\ almacenada \\ y\ devuelta\ por\ el\ circuito}}$$

Potencia

- $p_R(t) = \frac{V_p}{\sqrt{2}} . \frac{I_p}{\sqrt{2}} . \cos(\theta) + \frac{V_p}{\sqrt{2}} . \frac{I_p}{\sqrt{2}} . \cos(\theta)\cos(2wt)$
- $P = V_{rms} . I_{rms} . \cos(\theta)$ es la potencia consumida por la componente resistiva de la carga y se conoce como potencia activa o real (active power o real power)
- $p_x(t) = VIsen(\theta).sen(2wt)$ es la potencia oscilante hacia y desde la carga debido a la componente reactiva (ind/cap).
- $\cos(\theta)$ se denomina *factor de potencia*

Potencia - Ejemplo

- Sean

$$v(t) = 100\cos(wt)$$

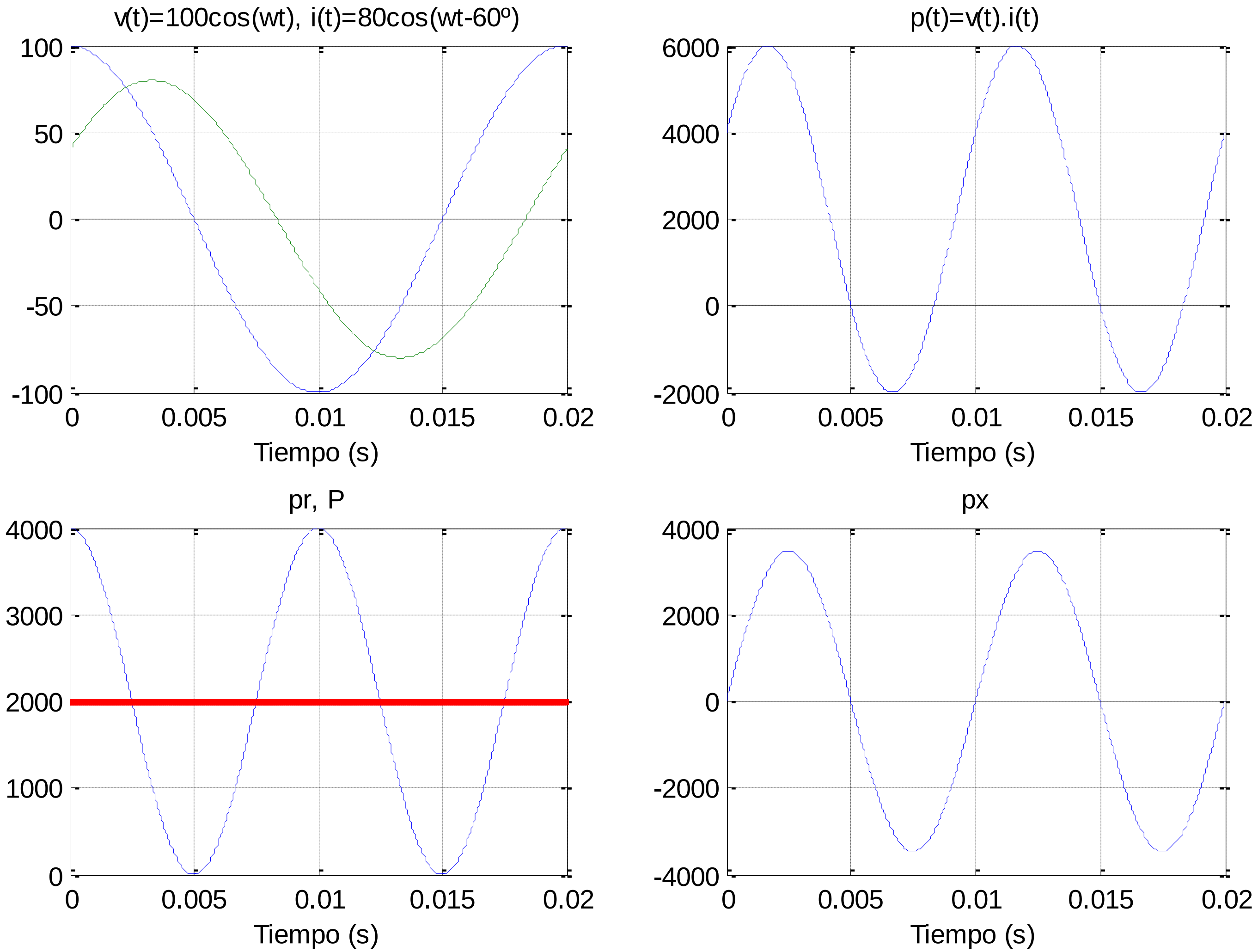
$$\overline{Z} = 1.25\langle 60^{\circ}$$

- Entonces:

$$i(t) = 80\cos(wt - 60^{\circ})$$

$$p(t) = v(t).i(t) = 8000\cos(wt)\cos(wt - 60^{\circ})$$

Potencia - Ejemplo



Potencia Compleja

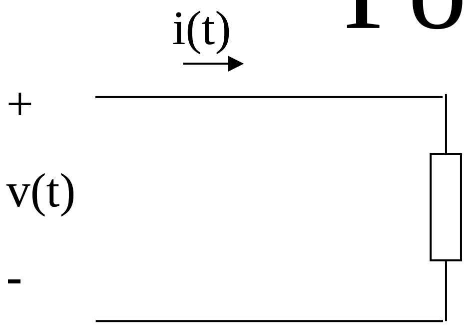


Figura 4

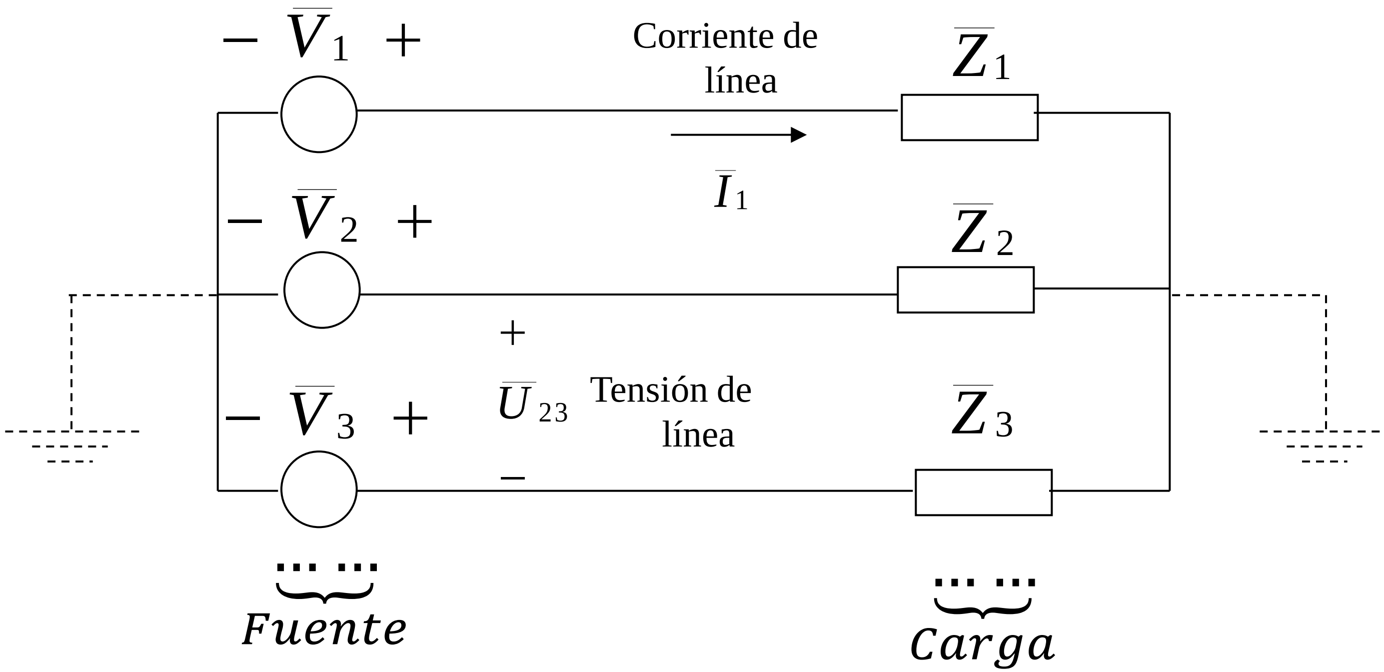
- Dados los fasores asociados a la tensión y corriente de la figura 4:
  - $\bar{V} = Ve^{j\theta_v}$
  - $\bar{I} = Ie^{j\theta_i}$
- Se define Potencia Aparente o compleja como:
  - $\bar{S} \equiv \bar{V}\hat{I} = V.I.e^{j(\theta_v-\theta_i)} = VIcos(\theta) + jVIsen(\theta)$
  - $\theta = \theta_v - \theta_i$
- La parte real coincide con la potencia activa.
- La parte imaginaria, que coincide con el valor de pico de la potencia oscilante entre la carga y la fuente, se define como potencia reactiva representada por la letra Q.

Unidades de la Potencia

- [P]=W, kW, MW
- [Q]=VAr, kVAr, MVAr
- [S]=VA, kVA, MVA

Sistemas Trifásicos

Sistemas Trifásicos



- Tensiones de fase y de línea
- Corrientes de fase y de línea

Sistemas Trifásicos

- Fuente trifásica:

$$v_1(t) = V_{p1}\cos(wt) \quad \Rightarrow \quad \overline{V_1} = V_1$$

$$v_2(t) = V_{p2}\cos(wt+\theta_2) \quad \Rightarrow \quad \overline{V_2} = V_2 e^{j\theta_2}$$

$$v_3(t) = V_{p3}\cos(wt+\theta_3) \quad \Rightarrow \quad \overline{V_3} = V_3 e^{j\theta_3}$$

- Si $V_1=V_2=V_3$, $\theta_2=-120^o$, $\theta_3=120^o$ entonces la fuente es equilibrada y directa

Sistemas Trifásicos

- Fuente trifásica:

$$v_1(t) = V_{p1}\cos(wt) \quad \Rightarrow \quad \overline{V_1} = V_1$$

$$v_2(t) = V_{p2}\cos(wt + \theta_2) \quad \Rightarrow \quad \overline{V_2} = V_2 e^{j\theta_2}$$

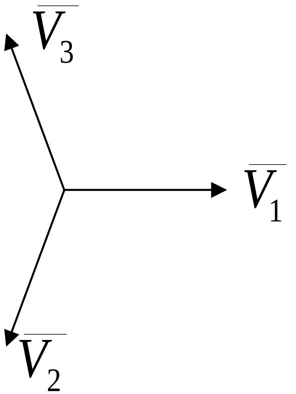
$$v_3(t) = V_{p3}\cos(wt + \theta_3) \quad \Rightarrow \quad \overline{V_3} = V_3 e^{j\theta_3}$$

- Si $V_1=V_2=V_3$, $\theta_2=-120º$, $\theta_3=120º$ entonces la fuente es equilibrada y directa

Sistemas Trifásicos

- Fuente equilibrada y directa:

$$\overline{V_1} = V$$
$$\overline{V_2} = Ve^{-j120º}$$
$$\overline{V_3} = Ve^{j120º}$$



$$\overline{U_{13}} = \overline{V_1} - \overline{V_3}$$
$$U = \sqrt{3}.V$$

Sistemas Trifásicos

- Operador ***a***

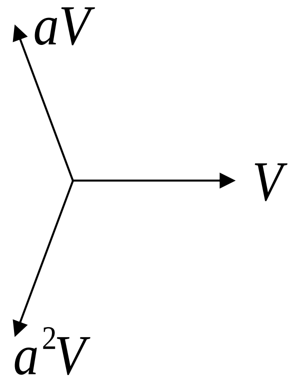
$$\bar{a} = e^{j120^o} = \cos 120^o + j sen 120^o = -\frac{1}{2} + j\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\overline{V_1} = V$$

$$\overline{V_2} = Ve^{-j120^o} = a^2V$$

$$\overline{V_3} = Ve^{j120^o} = aV$$

$$\vec{V} = \begin{pmatrix} V \\ a^2V \\ aV \end{pmatrix} = V.\begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$$

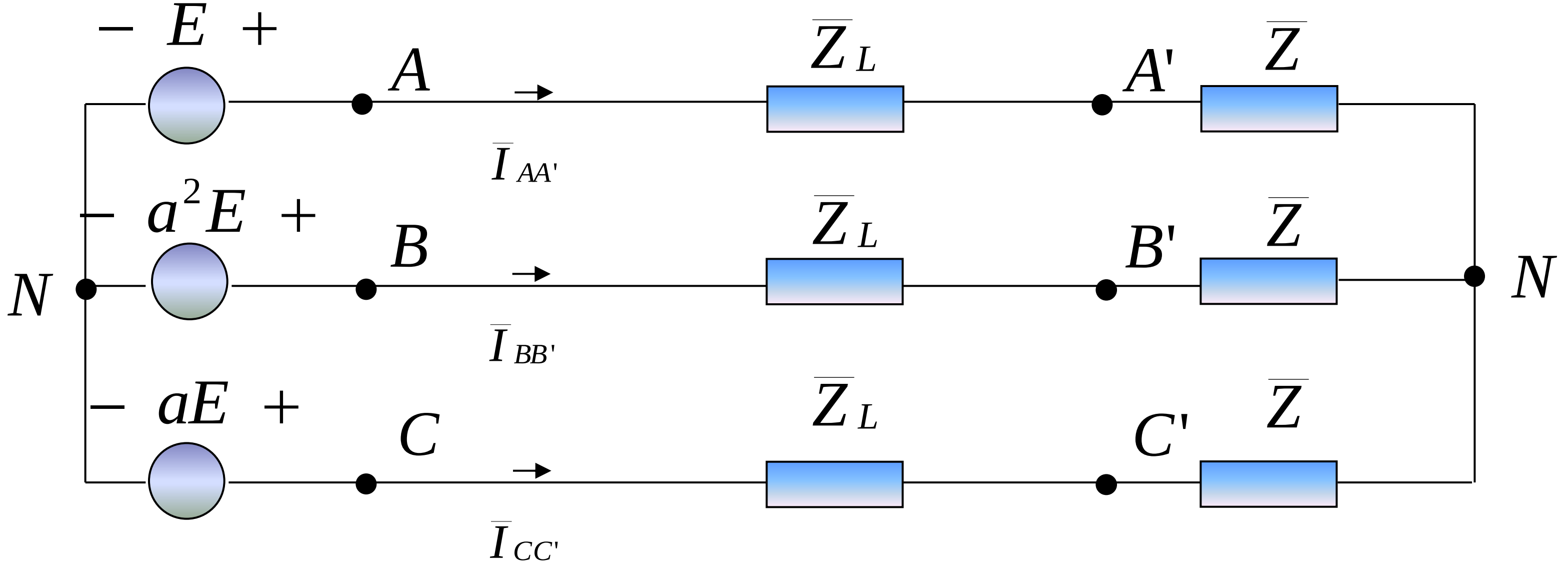


$$\overline{U_{13}} = \overline{V_1} - \overline{V_3}$$

$$V = \frac{U}{\sqrt{3}}$$

Sistemas Trifásicos

- Resolución con generador en estrella y carga en estrella:

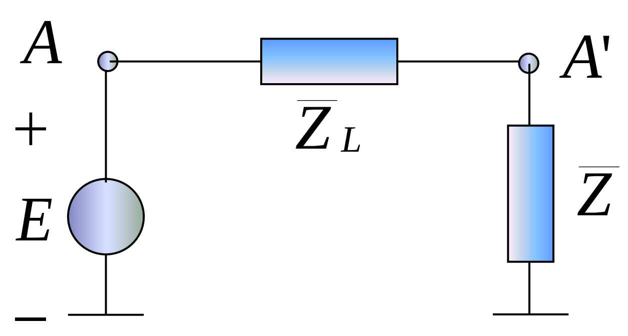


Sistemas Trifásicos

- $\bar{I}_{AA\prime} = \frac{E+\bar{V}_{NN\prime}}{\bar{Z}_L+\bar{Z}}$
- $\bar{I}_{BB\prime} = \frac{a^2E+\bar{V}_{NN\prime}}{\bar{Z}_L+\bar{Z}}$
- $\bar{I}_{CC\prime} = \frac{aE+\bar{V}_{NN\prime}}{\bar{Z}_L+\bar{Z}}$
- $\bar{I}_{AA\prime} + \bar{I}_{BB\prime} + \bar{I}_{CC\prime} = \frac{3.\bar{V}_{NN\prime}}{\bar{Z}_L+\bar{Z}} = 0$
- $\bar{V}_{NN\prime} = 0$ siendo entonces $\bar{V}_N = \bar{V}_{N\prime}$
- ¿Cómo cambia el razonamiento anterior si se conectaran los puntos N y N’ a través de un conductor de impedancia nula?

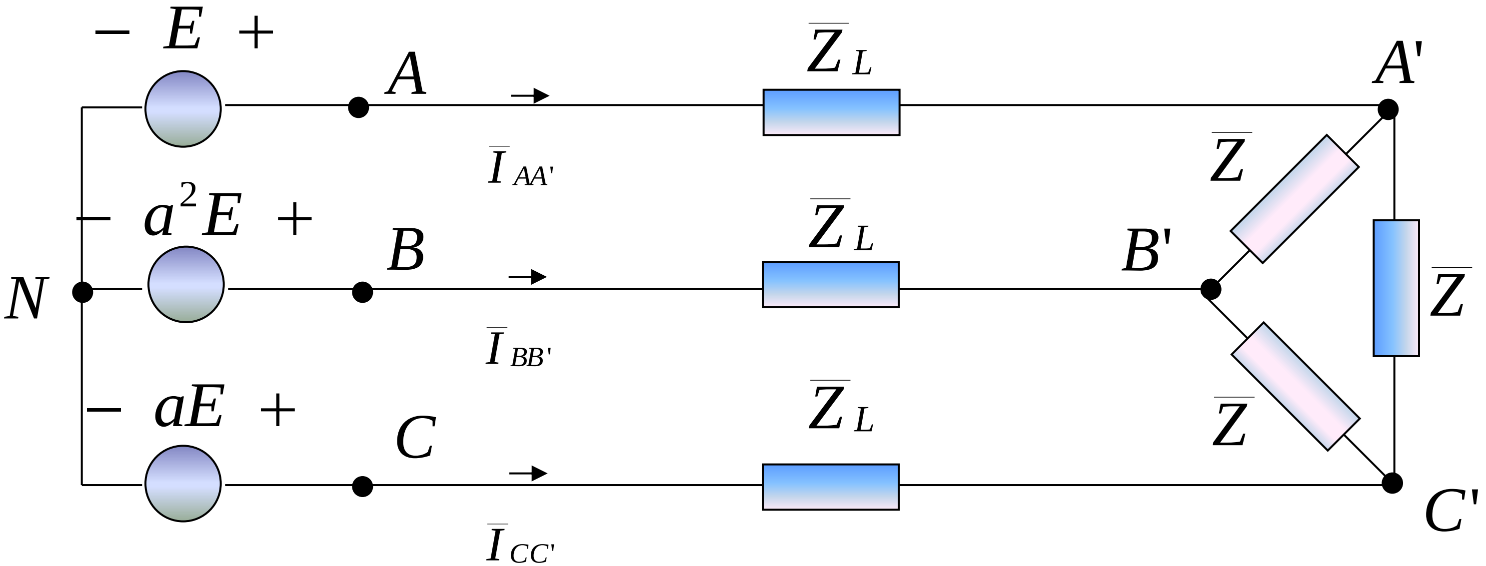
Sistemas Trifásicos

- Como $\bar{V}_{NN'} = 0$
  - $\bar{I}_{AA'} = \frac{E}{\bar{Z}_L + \bar{Z}}$; $\bar{I}_{BB'} = a^2 \bar{I}_{AA'}$; $\bar{I}_{CC'} = a\bar{I}_{AA'}$
  - Notación matricial: $\vec{I} = \begin{pmatrix} \bar{I}_{AA'} \\ \bar{I}_{BB'} \\ \bar{I}_{CC'} \end{pmatrix} = \frac{E}{\bar{Z}_L + \bar{Z}} . \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$
- Alcanza con resolver el circuito equivalente de una fase:



Sistemas Trifásicos

- Resolución con generador en estrella y carga en triángulo:



Sistemas Trifásicos

$$\overline{I}_{AA'} = \frac{E}{\overline{Z}_L + \frac{\overline{Z}}{3}}; \quad \overline{I}_{BB'} = a^2 \overline{I}_{AA'}; \quad \overline{I}_{CC'} = a \overline{I}_{AA'}$$

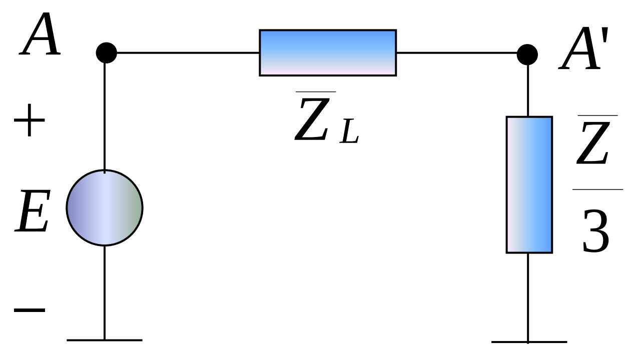
- Resolviendo:

$$\overline{V}_N = \overline{V}_{N'}$$

En notación matricial

$$\vec{I} = \begin{pmatrix} \overline{I}_{AA'} \\ \overline{I}_{BB'} \\ \overline{I}_{CC'} \end{pmatrix} = \frac{E}{\overline{Z} + \frac{\overline{Z}}{3}} . \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ a \end{pmatrix}$$

- Alcanza con resolver el circuito equivalente de una fase:



Sistemas Trifásicos

- Potencia en circuitos trifásicos en general:

$$\left.\begin{array}{l} v_1(t) = \sqrt{2}V_1\cos(wt+\varphi_1) \\ v_2(t) = \sqrt{2}V_2\cos(wt+\varphi_2) \\ v_3(t) = \sqrt{2}V_3\cos(wt+\varphi_3) \\ \\ i_1(t) = \sqrt{2}I_1\cos(wt+\delta_1) \\ i_2(t) = \sqrt{2}I_2\cos(wt+\delta_2) \\ i_3(t) = \sqrt{2}I_3\cos(wt+\delta_3) \end{array}\right\rangle$$

$$p_{3f}(t) = v_1 i_1 + v_2 i_2 + v_3 i_3$$

El valor medio será (haciendo $\theta_\mathrm{i} = \varphi_i - \delta_i$):

$$P = V_1 I_1\cos(\theta_1) + V_2 I_2\cos(\theta_2) + V_3 I_3\cos(\theta_3)$$

Sistemas Trifásicos

- Potencia en circuitos trifásicos balanceados
- Tensiones
  - $v_1(t) = \sqrt{2}\,\mathrm{V}\cos(wt); v_2(t) = \sqrt{2}V\cos(wt - 120º)\,;\ v_3(t) = \sqrt{2}\,V\cos(wt + 120º)\,;$
- Corrientes
  - $i_1(t) = \sqrt{2}I\cos(wt + \theta); i_2(t) = \sqrt{2}I\cos(wt - 120º + \theta)\,;\ i_3(t) = \sqrt{2}\,I\cos(wt + 120º + \theta)\,;$
- $p_{3f}(t) = v_1(t).\,i_1(t) + v_2(t).\,i_2(t) + v_3(t).\,i_3(t)$
- $p_{3f}(t) =$ 2VI$[\cos(wt)\cos(wt + \theta)$+$\cos(wt - 120º)\cos(wt - 120º + \theta)$+ $\cos(wt + 120º)\cos(wt + 120º + \theta)]$
- Utilizando la relación $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}$[cos(a+b)+cos(a-b)]
  - $p_{3f}(t) = VI[cos(2wt + \theta) + \cos(\theta) + \cos(2wt - 240º + \theta) + \cos(\theta) + \cos(2wt + 240º + \theta) + \cos(\theta)$
  - $\boldsymbol{p_{3f}(t) = 3VIcos(\theta)}$

Sistemas Trifásicos

- Potencia en circuitos trifásicos balanceados
  - La potencia compleja está dada por:

$$\overline{S} = \overline{V}_1\hat{I}_1 + \overline{V}_2\hat{I}_2 + \overline{V}_3\hat{I}_3$$

$$= \overline{V}\hat{I} + a^2\overline{V}conj\left(a^2\,\overline{I}\right) + a\overline{V}conj\left(a\overline{I}\right)$$

$$\overline{S} = 3\overline{V}\hat{I} = 3VI\cos(\theta) + j3VIsen(\theta) = \sqrt{3}UI\cos(\theta) + j\sqrt{3}UIsen(\theta)$$

$$S = 3VI = \sqrt{3}UI$$

$$P = 3VI\cos(\theta) = \sqrt{3}UI\cos(\theta)$$

$$Q = 3VIsen(\theta) = \sqrt{3}UIsen(\theta)$$

Diagramas unifilares

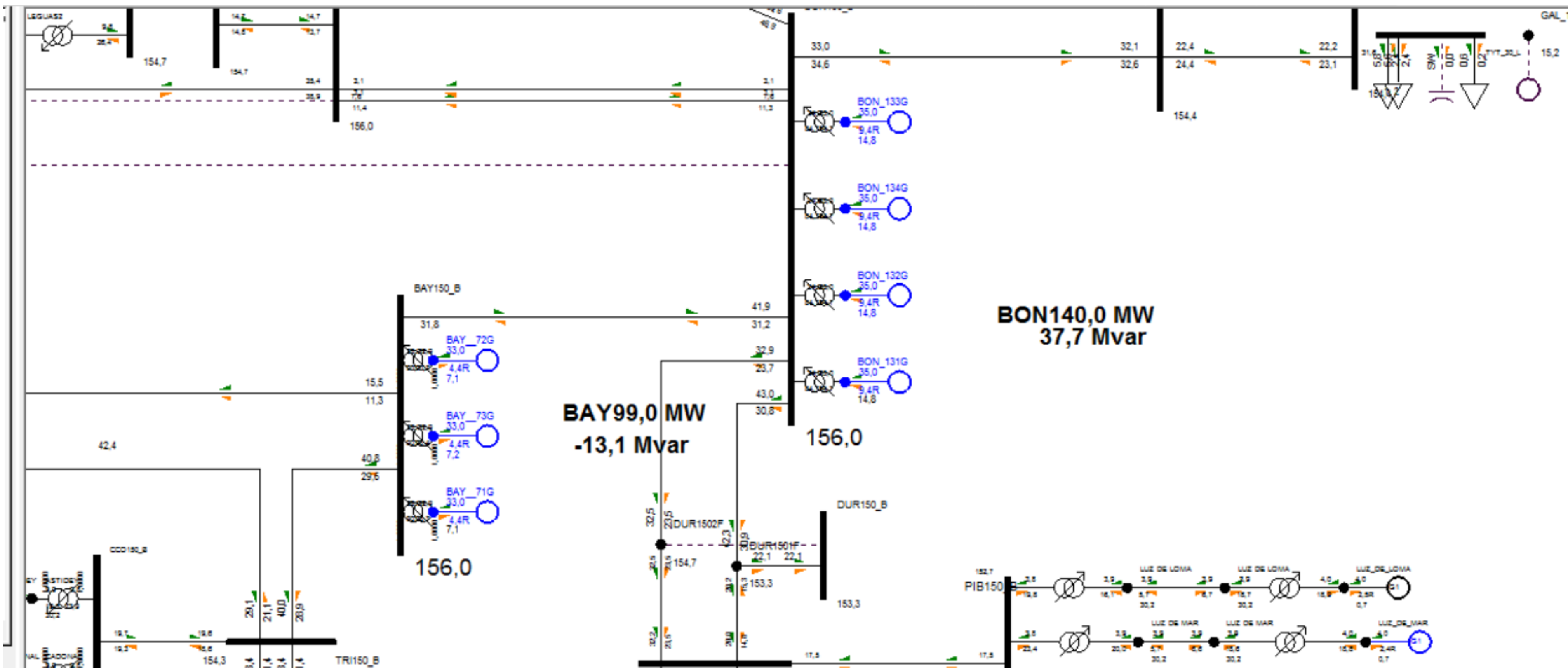
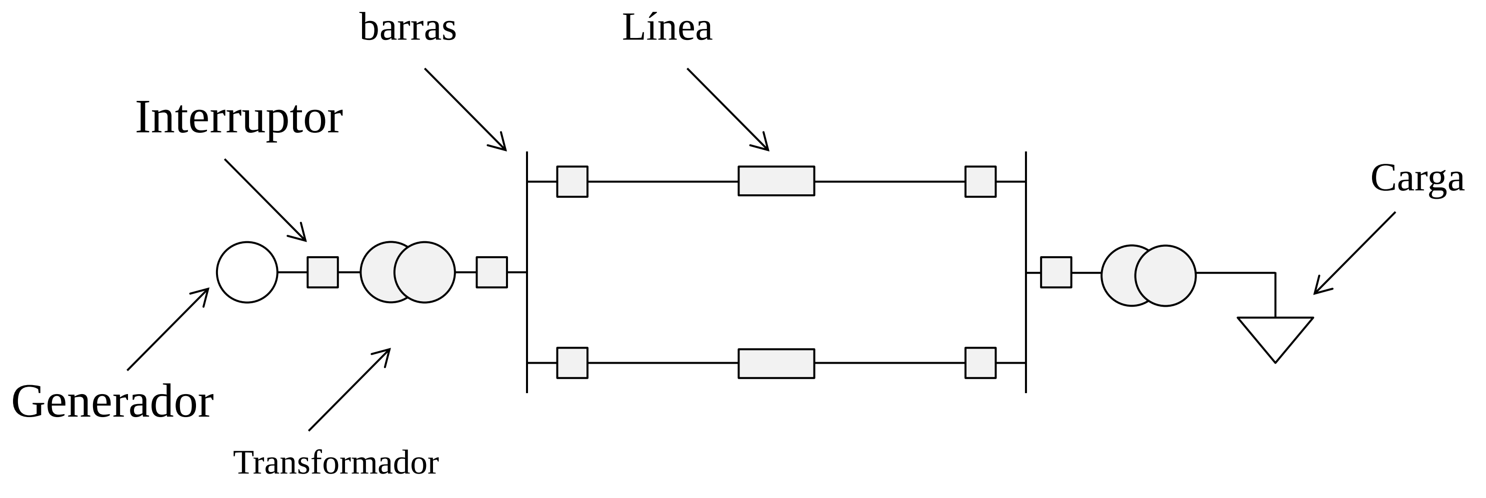


Diagrama Unifilar

- Los sistemas trifásicos se componen de elementos y equipos diseñados con los mismos componentes para cada una de las tres fases.
  - Las líneas tienen 3 conductores idénticos
  - los interruptores tienen tres cámaras de corte idénticas
  - los transformadores tienen 3 juegos de bobinados idénticos
  - Todos los equipos tienen 3 componentes idénticos para preservar el sistema eléctrico balanceado.
- Los sistemas eléctricos de potencia son extremadamente complejos y extensos por lo que dibujarlos para cada fase, además de incluir información redundante, lo hace poco práctico.
- Por este motivo el sistema eléctrico usualmente se representa por un dibujo o esquema de una sola fase llamado Esquema o Diagrama Unifilar.

Diagrama Unifilar

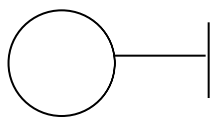
- Es una forma concisa de representar la ubicación e interacción de todos los componentes del sistema eléctrico.

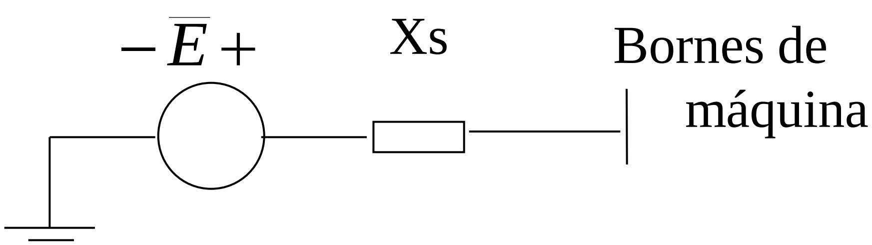


Modelos básicos

- Generador
- Transformador de 2 arrollamientos
- Carga

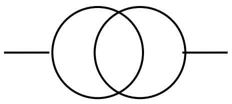
Modelos - Generador

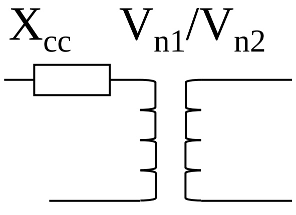
- Datos
  - Tensión Nominal V_n
  - Potencia nominal S_n
  - Reactancia sincrónica, X_s(%)
- Símbolo unifilar: 
- Modelo:



Modelos - Transformador

- Datos
  - Tensión Nominal primaria V_{n1}
  - Tensión Nominal primaria V_{n2}
  - Potencia nominal S_n
  - Reactancia de cortocircuito, X_{cc}(%)
- Símbolo unifilar:
- Modelo:



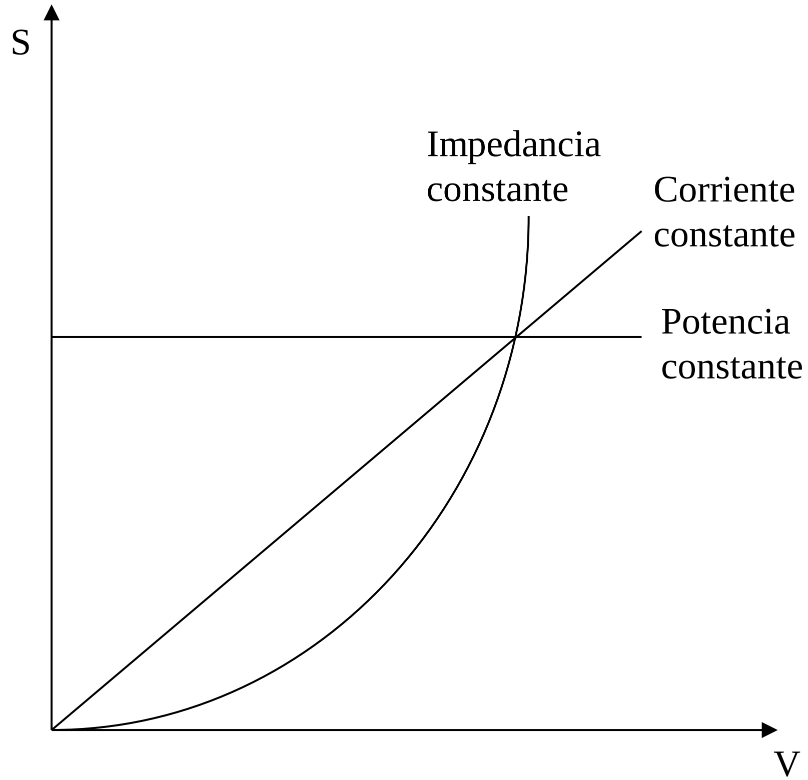


Modelos - Carga

- Hasta ahora, las cargas fueron representadas por impedancias complejas $\overline{Z} = R + jX$ constantes.
- En la realidad, la potencia consumida por la carga puede variar de diversas maneras con la tensión aplicada. En un caso general se tiene:
  - $P = f_1(V, f, \ldots)$
  - $Q = f_2(V, f, \ldots)$
- *f1* y *f2* son funciones que relacionan la potencia activa y reactiva con la tensión.
- Los modelos más conocidos son los siguientes:
  - Cargas de **corriente constante** con la tensión
  - Cargas de **potencia constante** con la tensión
  - Cargas de **impedancia constante** con la tensión
  - Cargas constituidas por una **combinación de las anteriores**

Modelos - Carga

- Potencia consumida por la carga en función de la tensión aplicada.



Modelos - Carga

- Corriente constante
  - La corriente absorbida por la carga se puede calcular en función de sus valores nominales

$$\overline{I}_N = \frac{\hat{S}_N}{\sqrt{3}\hat{U}_N} \quad \text{corriente nominal}$$

$$\overline{\mathrm{S}} = \sqrt{3}\overline{U}\hat{I} = \sqrt{3}\overline{U}\hat{I}_N = \sqrt{3}\overline{U}\frac{\overline{S}_N}{\sqrt{3}\overline{U}_N} = \overline{U}\frac{\overline{S}_N}{\overline{U}_N}$$

- Este modelo es recomendado para simulaciones de Estabilidad (transitorios electromecánicos) cuando no se conoce con exactitud el modelo de carga del sistema eléctrico.

Modelos - Carga

- Potencia constante
  - La corriente absorbida por la carga es inversamente proporcional a la tensión aplicada:

$$\overline{I} = \frac{\hat{S}_N}{\sqrt{3}\hat{U}} = \frac{P_N - jQ_N}{\sqrt{3}\hat{U}}$$

- Este modelo es utilizado principalmente en simulaciones de régimen permanente como los Flujos de Carga.

Modelos - Carga

- Impedancia constante
  - La impedancia se puede calcular a partir de las potencias activa y reactiva consumidas por la carga a tensión nominal.

$$\overline{Z} = \frac{\overline{U}_N}{\sqrt{3}\,\overline{I}_N} = \frac{\overline{U}_N}{\sqrt{3}}\frac{\sqrt{3}\hat{U}_N}{\hat{S}_N} = \frac{U_N^2}{\hat{S}_N} = \frac{U_N^2}{\hat{S}_N} = \frac{U_N^2}{S_N}\left(\cos\theta + jsen\theta\right)$$

$$\text{con } \theta = \arctan\left(\frac{Q}{P}\right)$$

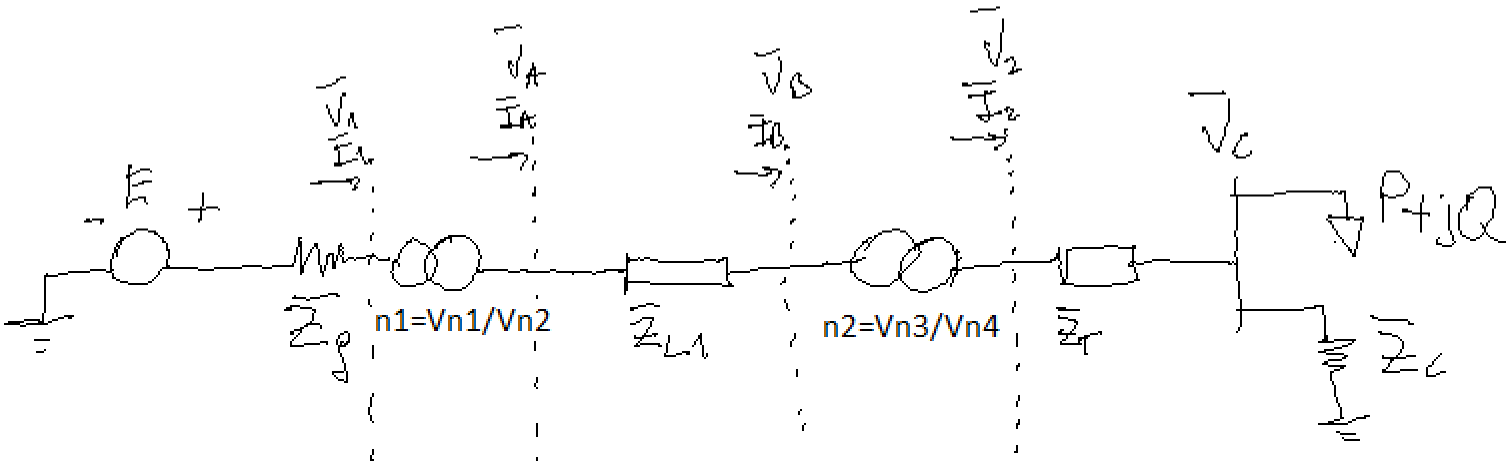
Relación entre la tensión y la potencia consumida por la carga

$$\overline{S} = \frac{U^2}{\hat{Z}} = \frac{U^2}{\hat{Z}}\frac{U_N^2}{U_N^2} = U^2\frac{\overline{S}_N}{U_N^2}$$

- Este modelo es utilizado principalmente en simulaciones de transitorios electromagnéticos.
- Una combinación entre los modelos Z cte y S cte se utiliza para análisis de estabilidad (Transitorios electromecánicos)

Transformadores

Trabajar en un único nivel de tensión



- $\begin{cases} \bar{I}_2 = \dfrac{P-jQ}{\hat{V}_c} + \dfrac{\bar{V}_c}{\bar{Z}_c} \\ \bar{V}_2 = \bar{V}_c + \bar{Z}_T \bar{I}_2 \end{cases}$; $\begin{cases} \dfrac{\bar{V}_B}{\bar{V}_2} = n_2 \\ \dfrac{\bar{I}_B}{\bar{I}_2} = \dfrac{1}{n_2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{I}_B = \dfrac{P-jQ}{n_2 \hat{V}_c} + \dfrac{n_2 \bar{V}_c}{n_2^2 \bar{Z}_c} \\ \bar{V}_B = n_2 \bar{V}_c + n_2^2 \bar{Z}_T \bar{I}_B \end{cases}$

- $\{ \bar{V}_1 = E - \bar{Z}_g \bar{I}_1$; $\begin{cases} \dfrac{\bar{V}_1}{\bar{V}_A} = n_1 \\ \dfrac{\bar{I}_1}{\bar{I}_A} = \dfrac{1}{n_1} \end{cases} \Rightarrow \{ \bar{V}_A = \dfrac{E}{n_1} - \dfrac{\bar{Z}_g}{n_1^2} \bar{I}_A$