Introducción al Control Industrial

Parcial 1 - (30 puntos) – 2015

Ejercicio 1 **(correcto +2 puntos; incorrecto -0,5 punto)**

Respuesta correcta: **iv)**

Ejercicio 2 **(3 puntos: correcta +1 / incorrecta –1))**

a) F (parte real positivo es inestable)
b) V
c) F (el transitorio también depende de la entrada)

Ejercicio 3 **(11 puntos)**

a) La transferencia de una planta de "3er orden sin ceros" es: $H(s)=\dfrac{\alpha}{\left(s^2+2.\zeta.\omega_n.s+\omega_n^2\right)\left(s+\beta\right)}$.

"Estable": polos con parte real negativa; $\beta,\zeta,\omega_n>0$

"Par de polos dominantes": los polos complejos conjugados ($\zeta\le 1$) dominan al polo real.

"polos dominantes de módulo A": $\omega_n=A$

"valor absoluto de la parte real igual al doble de la parte imaginaria":

$\mathrm{Re}=-\zeta.\omega_n \quad \mathrm{Im}=\pm\sqrt{1-\zeta^2}.\omega_n$

Luego: $\zeta=2.\sqrt{1-\zeta^2} \Rightarrow 5.\zeta^2=4 \Rightarrow \zeta^2=0{,}8 \Rightarrow \zeta=\sqrt{0{,}8}\cong 0{,}8944$

"el otro polo con módulo 20 veces mayor": $\beta=20.\omega_n=20.A$

"ganancia en régimen en continua igual a 5":

$$H(0)=\frac{\alpha}{\omega_n^2.\beta}=\frac{\alpha}{20.A^3}=5 \Rightarrow \alpha=100.A$$

De esta manera, la transferencia queda: $\boxed{H(s)=\dfrac{100.A^3}{\left(s^2+1{,}7889.A.s+A^2\right).\left(s+20.A\right)}}$

b) El denominador de la función de transferencia en lazo cerrado queda:

$$d(s)=s^3+\left(2.\xi.A+20.A\right).s^2+\left(A^2+2.\xi.A.20.A\right).s+20.A^3+100.A^3.K_p$$

$$d(s)=s^3+2.A\left(\xi+10\right).s^2+A^2.\left(1+40.\xi\right).s+20.A^3.\left(1+5.K_p\right)$$

$$d(s)=s^3+21{,}7888.A.s^2+36{,}7771A^2.s+20.A^3.\left(1+5.K_p\right)$$

Construyo el arreglo de Routh-Hurwitz:

$$\begin{array}{cc}
1 & A^2.\left(1+40.\zeta\right) \\
2.A.\left(10+\zeta\right) & 20.A^3.\left(1+5.K_p\right) \\
A^2.\left(1+40.\zeta\right)-\dfrac{20.A^3.\left(1+5.K_p\right)}{2.A.\left(10+\zeta\right)} & \\
20.A^3.\left(1+5.K_p\right) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 36{,}7771.A^2 \\ 21{,}7888.A & 20.A^3.(1+5.K_p) \\ 36{,}7771A^2 - 0{,}9179.A^2.(1+5.K_p) & \\ 20.A^3.(1+5.K_p) & \end{array}$$

El 1er y 2º renglón de la 1ª columna son positivos por lo que las condiciones de estabilidad son:

$$(1+40.\zeta).(10+\zeta) > 10.(1+5.K_p) \quad \rightarrow \quad K_p < 0{,}2.\left[\frac{(1+40.\zeta).(10+\zeta)}{10} - 1\right] = 7{,}8133$$

$$1+5.K_p > 0 \quad \rightarrow \quad K_p > -0{,}2$$

Luego $\boxed{-0{,}2 < K_P < 7{,}8133}$

Ejercicio 4 (14 puntos)

1) Representación en variables de estado

Segunda ley de Newton aplicada a la placa superior: $m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + F_e$ (I)

Capacidad variable: $C = \dfrac{\varepsilon_0 A}{(h-y)}$.

Energía potencial electrostática: $U = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 A}{(h-y)} v^2$.

Fuerza electrostática: $F_e = \dfrac{\partial U}{\partial y} = \dfrac{1}{2}\dfrac{\varepsilon_0 A}{(h-y)^2} v^2$.

Sustituyendo en (I) se obtiene la ecuación del movimiento de la placa superior:

$$m\ddot{y} = -ky - b\dot{y} + \frac{1}{2}\frac{\varepsilon_0 A}{(h-y)^2} v^2 .$$

Representación en variables de estado:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ -\dfrac{k}{m} y - \dfrac{b}{m}\dot{y} + \dfrac{1}{2m}\dfrac{\varepsilon_0 A}{(h-y)^2} v^2 \end{bmatrix} \\ y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ 0 \end{bmatrix} \end{cases}.$$

2) Punto de equilibrio

Para que $y = y_{eq} \in (0,h)$ sea un punto de equilibrio $v = v_{eq}$ debe verificar:

$\varepsilon_0 A v_{eq}{}^2 = 2ky_{eq}(h - y_{eq})^2$. Por lo tanto,

$$v_{eq} = \sqrt{\frac{2ky_{eq}}{\varepsilon_0 A}}(h - y_{eq}).$$

3) Linealización

Sean $\tilde{y} = y - y_{eq}$ y $\tilde{v} = v - v_{eq}$. Representación en variables de estado linealizada:

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{\varepsilon_0 A v_{eq}^{2}}{\left(h - y_{eq}\right)^3} - k \right) & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{\varepsilon_0 A v_{eq}}{m\left(h - y_{eq}\right)^2} \end{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} \end{cases},$$

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}\begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\dfrac{k}{m}\left(\dfrac{h - 3y_{eq}}{h - y_{eq}} \right) & -\dfrac{b}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \dfrac{2k y_{eq}}{m v_{eq}} \end{bmatrix} \tilde{v} \\ \tilde{y} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{y} \\ \dot{\tilde{y}} \end{bmatrix} \end{cases}.$$

Función de transferencia:

$$H(s) = \frac{\tilde{y}}{\tilde{v}}(s) = \frac{\dfrac{\varepsilon_0 A v_{eq}}{m\left(h - y_{eq}\right)^2}}{s^2 + \dfrac{b}{m}s + \dfrac{1}{m}\left(k - \dfrac{\varepsilon A v_{eq}^{2}}{\left(h - y_{eq}\right)^3} \right)} = \frac{\dfrac{2k}{m v_{eq}} y_{eq}}{s^2 + \dfrac{b}{m}s + \dfrac{k}{m}\left(\dfrac{h - 3y_{eq}}{h - y_{eq}} \right)} = \frac{\dfrac{2k}{m v_{eq}} y_{eq}}{s^2 + \dfrac{b}{m}s + \dfrac{k}{2m}}$$

$$H(s) = \frac{0{,}05}{s^2 + 100\,s + 5000} = \frac{G\omega_n^{\,2}}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^{\,2}}$$ donde $G = 10^{-5}$; $\omega_n = 50\sqrt{2}$; $\zeta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.