Introducción al Control Industrial

Parcial 1 - (30 puntos) – 2014

Ejercicio 1 **(correcto +2 puntos; incorrecto -0,5 punto)**

Respuesta correcta: **iii)**

Ejercicio 2 **(2 puntos)**

$$\frac{Y}{V} = \frac{N.H}{1 + H.S.G}$$

Ejercicio 3 **(12 puntos)**

a) La respuesta escalón se asemeja a la de un sistema de primer orden con tiempo muerto.

La transferencia genérica sería $H(s) = \dfrac{G.e^{-T.s}}{\tau.s + 1}$, y la respuesta a un escalón de amplitud U aplicado en t = 0, U.*Y*(*t*), sería $y(t) = G.U.\left(1 - e^{-\frac{t-T}{\tau}}\right).Y(t-T)$

El escalón para el cual vemos la respuesta es unitario (U = 1), la respuesta empieza a manifestarse transcurridos 0,1 segundos, por lo que T = 0,1, y el valor final tiende a 5, por lo que G = 5.

Lo que nos queda por identificar es la constante de tiempo, y para eso buscamos el tiempo para el cual la respuesta alcanza el 63,2% de su valor final (5x0,632 = 3,16). Eso ocurre transcurridos 0,35 segundos desde la aplicación del escalón y 0,25 segundos desde que empieza a manifestarse la respuesta. Luego, τ = 0,25.

De esta manera, la transferencia queda: $\boxed{H(s) = \dfrac{5.e^{-0,1.s}}{0,25.s + 1}}$

Tomando cualquier otro punto se puede verificar que cierra bien con el resto de la respuesta escalón que se ve en la gráfica. Por ejemplo, para t = 0,5 segundos, la gráfica muestra que y(t) es aproximadamente 4, y por el modelo identificado se tiene que $y(t) = 5.\left(1 - e^{-\frac{0,5-0,1}{0,25}}\right).Y(0,5-0,1) = 5.\left(1 - e^{-1,6}\right).Y(0,4) = 5.(1 - 0,2019) = 3,99$.

b) La función de transferencia en lazo cerrado queda: $H^{CL}(s) = \dfrac{K_P.H(s)}{1 + K_P.H(s)} = \dfrac{5.K_P.e^{-0,1.s}}{0,25.s + 1 + 5.K_P.e^{-0,1.s}}$

Como el sistema en lazo abierto es estable, para que el lazo cerrado sea estable la traza polar de H(s) no debe encerrar al $-1/K_P$. Visto de otra manera, cuando el desfasaje alcanza los –180º por primera vez (lo hace muchas veces por el tiempo muerto) el módulo tiene que ser menor que $1/K_P$.

El desfasaje es: $\angle H(j\omega) = -Arctg(0,25.\omega) - 0,1.\omega$

Impongo que valga -π y despejo ω, que resulta 17,9 rad/s. A esa frecuencia, el módulo vale $\left|H(j\omega)\right|_{\omega=17,9} = \dfrac{5}{\left|0,25.17,9j+1\right|} = \dfrac{5}{\sqrt{4,475^2+1}} = 1,090$

Luego $\boxed{K_P < \dfrac{1}{1,090} = 0,917}$

c) Si K_P es la mitad del valor límite de estabilidad, el margen de ganancia es: $\boxed{MG = 2}$

Por otra parte, $\left|K_P.H(j\omega)\right| = \dfrac{5.0,917/2}{\left|0,25.\omega.j+1\right|} = \dfrac{2,293}{\sqrt{0,0625.\omega^2+1}}$

Veo para qué frecuencia el módulo es unitario: $\omega = 8,254$ rad/s

Y el desfasaje a esa frecuencia es $\angle H(j\omega)\big|_{\omega=0,461} = -Arctg(0,25.8,254) - 0,1.8,254 = -111,4^\circ$

Por lo que el margen de fase resulta: $\boxed{MF = 68,6^\circ}$

Ejercicio 4 **(14 puntos)**

A) Ecs dinámicas del sistema.

De la letra: $Q_1 = K_v.\sqrt{P-P_{in}}.U$; y del diagrama: $Q_2 = Q + Q_1$

Del compresor se tiene que: $P_{in} * Q_{c1}^k = P * Q_{c2}^k$, de donde $Q_{c2} = Q_{c1}.\sqrt[k]{\dfrac{P_{in}}{P}}$ con Q_{c1} constante.

En el recipiente de volumen V se cumple:

$PV = MRT$ ley de gases ideales, donde T y P son las temperatura y presión absolutas

$\dot{M} = \rho(Q_{c2} - Q_2)$ conservación de la masa

$\rho = \dfrac{M}{V} = \dfrac{P}{R.T}$ es la densidad en las cond. temperatura y presión dadas

$$\dot{M} = \dot{P}.\frac{V}{R.T} = \frac{P}{R.T}.\left(Q_{c1}.\sqrt[k]{\frac{P_{in}}{P}} - K_v.\sqrt{P-P_{in}}.U - Q\right)$$

Finalmente $\boxed{\dot{P} = \dfrac{1}{V}.\left(P^{\frac{k-1}{k}}.Q_{c1}.P_{in}^{k} - K_v.P.\sqrt{P-P_{in}}.U - P.Q\right)}$

B) Linealizar en torno del punto de operación indicado.

$$\dot{\tilde{p}} = \frac{1}{V}.\left[\frac{k-1}{k}.\sqrt[k]{\frac{P_{in}}{P_o}}.Q_{c1} - K_v.\left(\sqrt{P_o-P_{in}} + \frac{P_o}{2.\sqrt{P_o-P_{in}}}\right)U_o - Q_o\right].\tilde{p} - \frac{K_v.P_o}{V}.\sqrt{P_o-P_{in}}.\tilde{u} - \frac{P_o}{V}.\tilde{q}$$

En equilibrio: $\left.Q_{c1}.\sqrt[k]{\dfrac{P_{in}}{P}} - K_v.\sqrt{P-P_{in}}.U - Q\right|_o = 0$ y $Q_{c2o} = Q_{2o}$

Por lo que queda:

$$\boxed{\dot{\tilde{p}} = \frac{1}{V}.\left[-\frac{1}{k}.Q_{2o} - \left(\frac{K_v.P_o.U_o}{2.\sqrt{P_o-P_{in}}}\right)\right].\tilde{p} - \frac{K_v.P_o}{V}.\sqrt{P_o-P_{in}}.\tilde{u} - \frac{P_o}{V}.\tilde{q}}$$

Tomando como estado la presión y como entradas la apertura de la válvula y el caudal de demanda:

$$\left[\dot{\tilde{p}}\right] = A.\left[\tilde{p}\right] + B.\begin{bmatrix}\tilde{u}\\ \tilde{q}\end{bmatrix}$$

donde $A = \left[\dfrac{-1}{V}.\left(\dfrac{1}{k}(Q_o + K_v.\sqrt{P_o - P_{in}}.U_o) + \dfrac{K_v.P_o.U_o}{2.\sqrt{P_o - P_{in}}}\right)\right]$ y $B = \left[-\dfrac{K_v.P_o}{V}.\sqrt{P_o - P_{in}} \quad -\dfrac{P_o}{V}\right]$

Con los valores numéricos dados: $A = \left[-1605{,}4 \ {}^{1}\!/_{h}\right]$ y

$$B = \left[-37000 \, {}^{kg/cm^2}\!/_{h} \quad -7{,}4 \, {}^{kg/cm^2}\!/_{m^3}\right]$$

C) Para el modelo linealizado, se elije una acción de control en pequeña señal igual a:

$$u(s) = K\frac{(s+a)}{s} * p(s)$$

Hallar la función de transferencia del sistema realimentado, entrada q(s) y salida p(s).

Teníamos que $(s - A).p(s) = B_{11}.u(s) + B_{12}.q(s)$

Sustituyendo lo que vale $u(s)$: $\left(s - A - B_{11}.K.\dfrac{s+a}{s}\right).p(s) = B_{12}.q(s)$ y operando se llega a:

$$\boxed{\frac{p(s)}{q(s)} = \frac{B_{12}.s}{s^2 - (A + B_{11}.K).s - B_{11}.K.a}} \qquad \frac{p(s)}{q(s)} = \frac{-7{,}4.s}{s^2 + (1605{,}4 + 37000.K).s + 74.10^6.K}$$

El objetivo de control en régimen es tener inmunidad a la perturbación, o sea que p(+∝) = 0
Si se diseña un sistema estable (para K>0 por criterio de Routh-Hurwitz), aplicando el teorema del valor final, se tiene que:

- Para entradas del tipo escalón,

$$p(+\infty) = \lim_{s\to 0} s.p(s) = \lim_{s\to 0} s.\frac{-7{,}4.s}{s^2 + (1605{,}4 + 37000.K).s + 74.10^6.K}.\frac{1}{s} = 0$$

  por lo que el objetivo se cumple

- Para entradas del tipo rampa (velocidad de cambio constante),

$$p(+\infty) = \lim_{s\to 0} s.p(s) = \lim_{s\to 0} s.\frac{-7{,}4.s}{s^2 + (1605{,}4 + 37000.K).s + 74.10^6.K}.\frac{1}{s^2} = \frac{-7{,}4}{74.10^6.K}$$

  por lo que el error no es nulo, pero si muy pequeño (10^-7 para K del orden de la unidad).