Introducción al control industrial

Parcial 1 - (30 puntos) – 2019

Ejercicio 1 (Total 4 puntos: 0,5 puntos por correcta; -0,5 puntos por incorrecta)

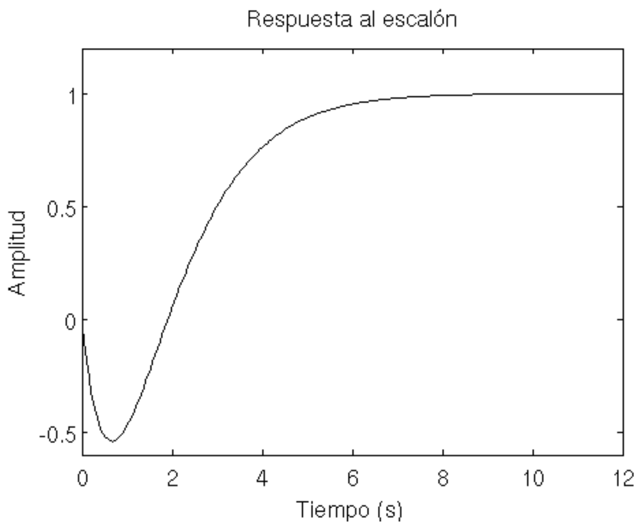
Considere los siguientes sistemas de entrada $u(t)$ y salida $y(t)$, e indique si son lineales y si son estables (BIBO).

1. $y(t) = a.u(t) + b \quad a, b > 0$
2. $y(t) = e^{-t}.u(t - T) \quad T > 0$
3. $y(t) = a.sen[u(t)] \quad a > 0$
4. $y(t) = \mathrm{sgn}[u(t)]$

	¿Lineal?		¿Estable?	
	Sí	No	Sí	No
1		X		X
2	X		X	
3		X	X	
4		X		X

Ejercicio 2 (5 puntos)

Considere un sistema descrito por una función de transferencia racional, de coeficientes reales, cuyos polos son **p1** y **p2** y su único cero es **z1**. En la figura se muestra la respuesta a escalón de este sistema. Complete la tabla, definiendo con cruces, un conjunto coherente de proposiciones verdaderas y justifique la elección de ese conjunto.



	< 0	$= 0$	> 0
$\mathrm{Re}(p_1)$	x		
$\mathrm{Im}(p_1)$		x	
$\mathrm{Re}(p_2)$	x		
$\mathrm{Im}(p_2)$		x	
$\mathrm{Re}(z_1)$			x
$\mathrm{Im}(z_1)$		x	

- Sistema es estable implica parte real de p1 y p2 tienen parte real negativa
- p1 y p2 deben ser reales porque sino serían complejos conjugados y la respuesta presentaría una oscilación amortiguada.
- $H(s) = \frac{K.(s-z1)}{(s-p1).(s-p2)}$

$$Y(s) = \frac{K.(s-z1)}{(s-p1).(s-p2)}.\frac{1}{s}$$

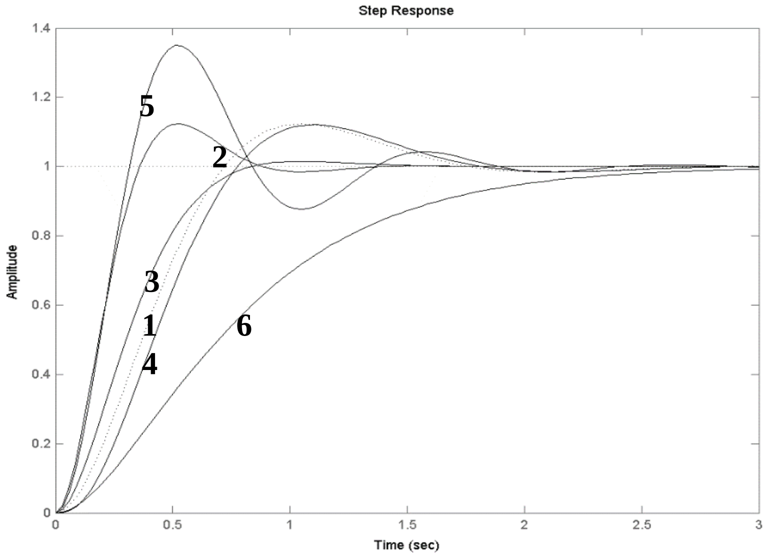
$$y(t) = \frac{-K.z1}{p1.p2} + \frac{K(p1-z1)}{(p1-p2).p2}e^{-p1.t} - \frac{K(p2-z1)}{(p1-p2).p2}e^{-p2.t}$$

$$\dot{y}(0) = -\frac{K(p1-z1)}{(p1-p2).p2} + \frac{K(p2-z1)}{(p1-p2).p2} = \boldsymbol{K} < \boldsymbol{0}$$

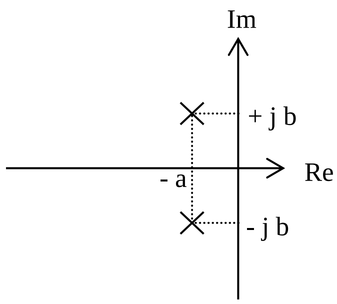
$$\left.\begin{array}{l} p1.p2 > 0 \\ \frac{-K.z1}{p1.p2} = 1 \end{array}\right\} \quad -K.z1 > 0$$

Z1 > 0

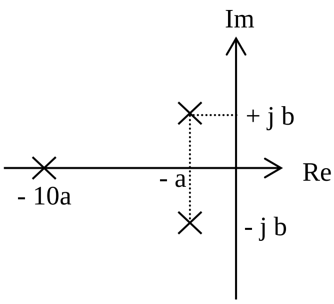
<u>Ejercicio 3</u> (Total 6 puntos: 2 puntos por correcta; hasta -1 punto por incorrecta)



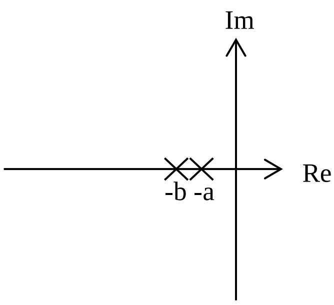
En la figura se muestran las respuestas a escalón (normalizadas a valor final 1) de 6 sistemas lineales e invariantes en el tiempo.
El patrón de ceros y polos de cada uno de los sistemas se reproduce a continuación.
Asocie cada una de las respuestas con el patrón adecuado. A modo de ejemplo, al primer patrón corresponde la respuesta nº 1 (identificada por el trazo punteado en la figura).



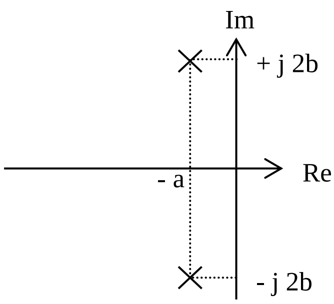
1



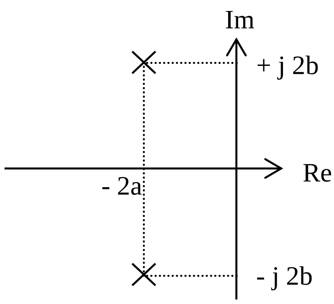
4



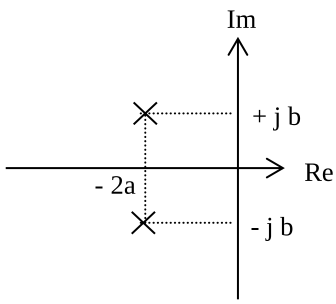
6



5



2

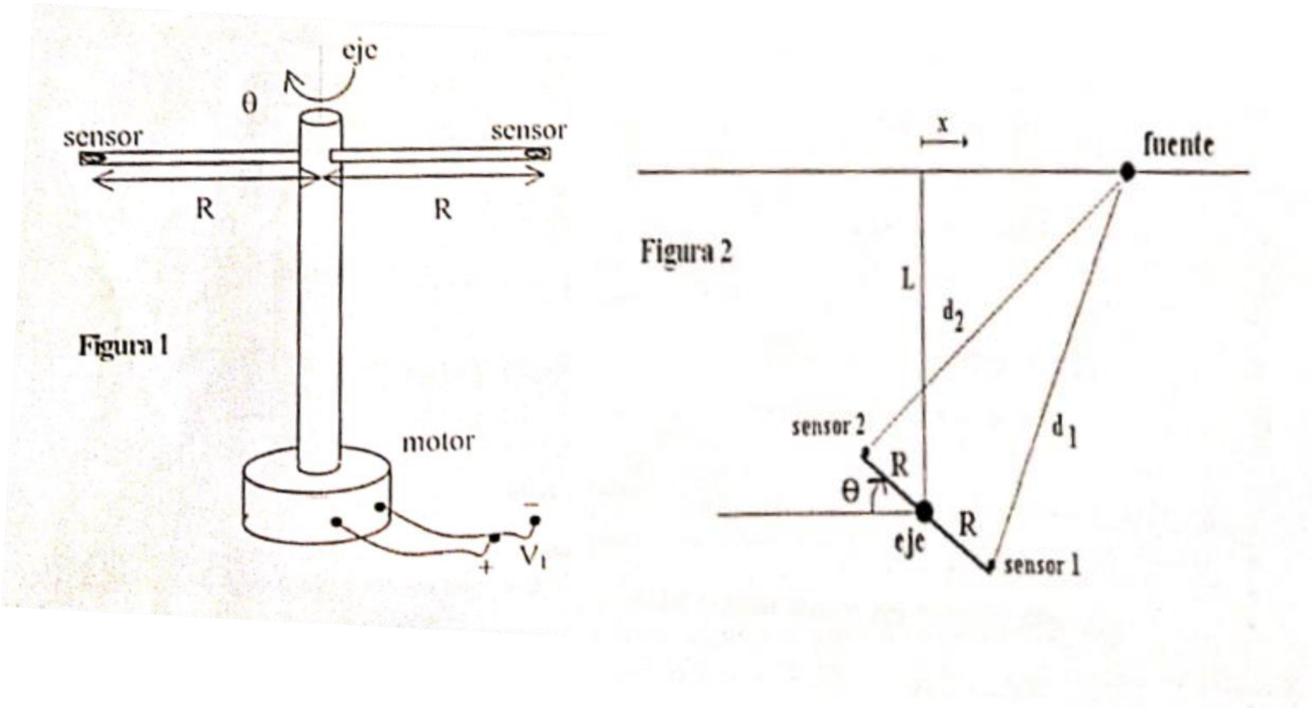


3

Ejercicio 4 (15 puntos)

Se considera el mecanismo posicionador de la **figura 1**. El dispositivo consta de un eje acoplado a un motor de continua en el cual se sostienen dos sensores. La distancia de los sensores al eje es **R**. El objetivo del mecanismo es seguir una fuente puntual de señal que se mueve en una guía a una distancia **L** del eje de giro (**figura 2)**. Los sensores entregan un voltaje de la forma:

$V = K\left(\frac{1}{{d_1}^2} - \frac{1}{{d_2}^2}\right)$, donde di es la distancia de los sensores a la fuente.



1) El sensado
Del análisisde la geometría del dispositivode sensado en relación a la posición de la fuente de luz, se puede extraer que:
   - ${d_1}^2 = L^2 + x^2 + R^2 + 2.R.(L.sen(\theta) - x.\cos(\theta))$
   - ${d_2}^2 = L^2 + x^2 + R^2 + 2.R.(x.\cos(\theta) - L.sen(\theta))$

Linealizar la ecuación del dispositivo de sensado que vincula el voltaje V con la posición x de la fuente y el ángulo de giro θ, en un entorno del punto $x_0 = 0 \;\; y \;\; \theta_0 = 0$.

Utilice los siguientes valores <u>luego</u> de obtenido el modelo linealizado: K=9 ; L=2m ; R=0.5m

2) El mecanismo

a. Para extraer un modelo del comportamiento del mecanismo se realizó un ensayo de respuesta al escalón que se muestra en las figuras 3 y 4 (el ensayo fue realizado con el mecanismo completamente montado, o sea, incluye el motor y su carga). Hallar las ecuaciones que rigen la dinámica del motor.

b. Considerando que la entrada al motor es la señal v (linealizada) de la parte 1, hallar la transferencia entre x (entrada) y θ (salida).
Hallar un modelo en variables de estado. Expresarlo matricialmente.

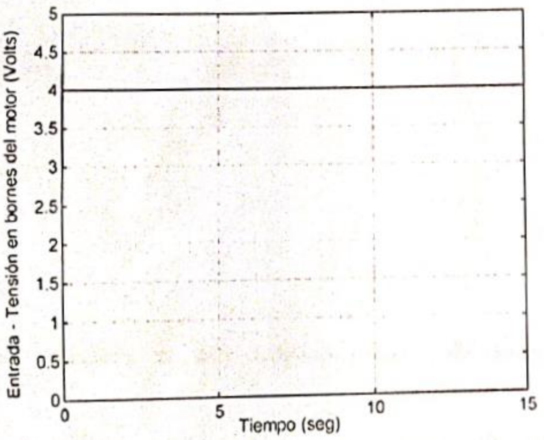


Figura 3

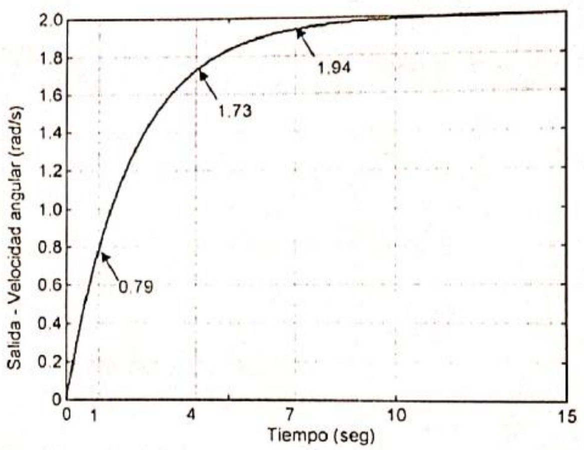


Figura 4

3) El control y su estabilidad

a. Determine los valores de los márgenes de estabilidad relativa del sistema de control.

b. Determine el rango de estabilidad ante posibles variaciones del valor de la constante K del dispositivo de sensado.

I) $V = K\left(\frac{1}{d_1^2} - \frac{1}{d_2^2}\right)$

$d_1^2 = L^2 + x^2 + R^2 + 2R(L\,\text{sen}\theta - x\cos\theta)$

$d_2^2 = L^2 + x^2 + R^2 - 2R(L\,\text{sen}\theta - x\cos\theta)$

$$\tilde{v} = \left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0,\theta_0} \cdot \tilde{x} + \left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{x_0,\theta_0} \cdot \tilde{\theta}$$

$$* \ \frac{\partial V}{\partial x} = K\left[(-1)\cdot\frac{2x + 2R(-\cos\theta)}{(d_1^2)^2} - (-1)\cdot\frac{2x - 2R(-\cos\theta)}{(d_2)^2}\right] = 2K\left[\frac{R\cos\theta - x}{(d_1^2)^2} + \frac{R\cos\theta + x}{(d_2^2)^2}\right]$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0,\theta_0} = 2K\left[\frac{R}{(L^2+R^2)^2} + \frac{R}{(L^2+R^2)^2}\right] = \frac{4KR}{(L^2+R^2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial x}\right|_{x_0,\theta_0} \simeq 0{,}111.K \simeq 1 \quad 0{,}9965$$

$$* \ \frac{\partial V}{\partial \theta} = K\left[(-1)\cdot\frac{2R(L\cos\theta + x\,\text{sen}\theta)}{(d_1^2)^2} - (-1)\cdot\frac{-2R(L\cos\theta + x\,\text{sen}\theta)}{(d_2^2)^2}\right] = -2KR\left[\frac{L\cos\theta + x\,\text{sen}\theta}{(d_1^2)^2} + \frac{L\cos\theta + x\,\text{sen}\theta}{(d_2^2)^2}\right]$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{x_0,\theta_0} = -2KR\left[\frac{L}{(R^2+L^2)^2} + \frac{L}{(R^2+L^2)^2}\right] = -\frac{4KRL}{(L^2+R^2)^2}$$

$$\left.\frac{\partial V}{\partial \theta}\right|_{x_0,\theta_0} \simeq -0{,}221.K \simeq -2$$

$$\Rightarrow \boxed{\tilde{v} = \tilde{x} - 2\tilde{\theta}}$$

II) a) $V_i = \frac{4}{s}$

Asumo modelo de 1er orden para el motor: $\frac{\omega}{V_I}(s) = \frac{G}{\tau s + 1}$

De la gráfica, estimo el valor final de $\omega(t)$ en 2 rad/s $\Rightarrow \boxed{G = \frac{2}{4} = 0{,}5 \text{ rad}/V.s}$

La respuesta al escalón sería: $\omega(t) = 4.G.(1 - e^{-t/\tau}) = 2(1 - e^{-t/\tau})$

En $t = 1$, $\omega(t) = 0{,}79 \rightarrow 1 - \frac{0{,}79}{2} = e^{-1/\tau} \Rightarrow \tau = 1{,}99\,s \Rightarrow \boxed{\tau = 2\ s}$

Verifico otro punto: $t = 4$, $\omega(t) = 1{,}729 \simeq 1{,}73$ ✓

$$\Rightarrow \frac{\omega}{V_I} = \frac{0{,}5}{2.s+1} \Rightarrow \boxed{\frac{\theta}{V_I}(s) = \frac{0{,}5}{s(2.s+1)}}$$

b)
$$\begin{cases} [s(2s+1)]\,\theta(s) = 0{,}5 \cdot V(s) \\ V(s) = X(s) - 2\theta(s) \end{cases} \Rightarrow [s(2s+1)]\,\theta(s) = 0{,}5\,(X(s) - 2\theta(s))$$

$$(2s^2 + s + 1)\,\theta(s) = 0{,}5 \cdot X(s)$$

$$\boxed{\frac{\theta}{X}(s) = \frac{0{,}5}{2s^2 + s + 1}}$$

Nota: si K fuera variable $\Rightarrow V(s) = \frac{K}{9}\cdot(X(s) - 2\theta(s))$

III) a) La transf. en lazo abierto es: $H^{ol}(s) = \frac{K}{9} \cdot \frac{\theta}{V_I}(s) \cdot 2 = \frac{K}{9} \cdot \frac{1}{s(2s+1)}$

Polos en $s = -0{,}5$ y $s = 0$

Como la fase nunca cruza los $-180°$ $\Rightarrow$ $\boxed{MG = \infty}$

$|H^{ol}(j\omega_c)| = 1 \xrightarrow{K=9} \omega\sqrt{1^2+(2\omega)^2} = 1 \rightarrow \omega^2(1+4\omega^2) = 1$

Sea $x = \omega^2 \Rightarrow 4x^2 + x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1+16}}{8} \xrightarrow{x>0} x = 0{,}39$

$\Rightarrow \omega_c = 0{,}625$ rad/s

$\text{Arg}\{H^{ol}(j\omega_c)\} = -90° - \text{Arctg}(2\omega_c) = -141{,}3° \Rightarrow \boxed{MF = 38{,}7°}$

b) Como K aparece como un factor multiplicativo en el numerador de $H^{ol}(s)$ y MG es infinito $\Rightarrow$ $\boxed{\forall K>0 \text{ el sist. es estable}}$