Introducción al control industrial

Parcial 1 - (30 puntos) - 2013

Ejercicio 1 (correcto +2 puntos; incorrecto -0,5 punto)

Respuesta correcta: V)

Ejercicio 2 (11 puntos)

1. MVE

Primera cardinal según x: $M.\ddot{x} = f - K.x - B.\dot{x}$

Vínculo entre coordenadas: $x = r.\theta$

Segunda cardinal a la polea: $J.\ddot{\theta} = T_m - f.r$; $T_m = K_m.i$

Malla eléctrica del motor de CC: $v = R.i + e$; $e = K_m.\dot{\theta}$

Operando:

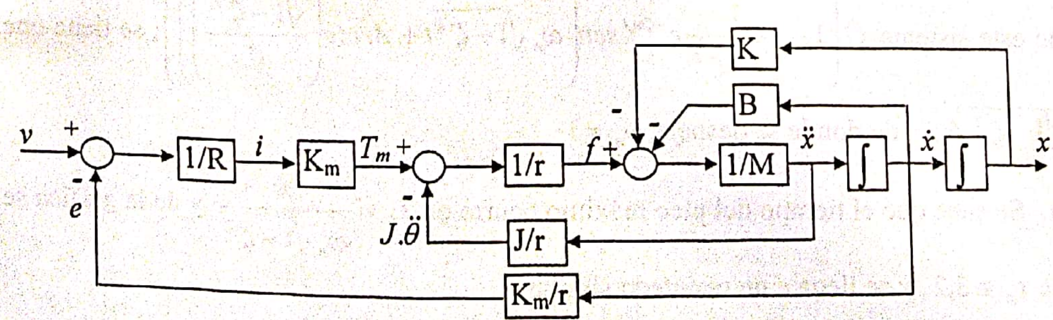
$$J.\ddot{\theta} = K_m.\left(\frac{v - K_m.\dot{\theta}}{R}\right) - f.r \Rightarrow f = \frac{K_m}{R.r}.v - \frac{K_m^2}{R.r}.\dot{\theta} - \frac{J}{r}.\ddot{\theta}$$

$$M.\ddot{x} = \frac{K_m}{R.r}.v - \frac{K_m^2}{R.r}.\frac{\dot{x}}{r} - \frac{J}{r}.\frac{\ddot{x}}{r} - K.x - B.\dot{x} \Rightarrow \boxed{\left(M + \frac{J}{r^2}\right).\ddot{x} = \frac{K_m}{R.r}.v - \left(B + \frac{K_m^2}{R.r^2}\right).\dot{x} - K.x}$$

Matricialmente:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \dot{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{B'}{M'} & -\frac{K}{M'} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{K_m}{R.r.M'} \\ 0 \end{bmatrix} [v]$$

$$[x] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} \dot{x} \\ x \end{bmatrix} + [0][v]$$ donde $M' = M + J/r^2$ y $B' = B + K_m^2/R.r^2$



2. Transferencia $\frac{X}{V}(s) = \frac{K_m/R.r}{M'.s^2 + B'.s + K} = \frac{G.\omega_n^2}{s^2 + 2.\zeta.\omega_n.s + \omega_n^2}$

G es la ganancia en continua, luego: $\boxed{G = 0{,}05}$

A la frecuencia 3,18 Hz = 20 rad/s, el desfasaje es -90º, que en un sistema de 2º orden se da siempre en ω_n. Por lo tanto, $\boxed{\omega_n = 20}$

El módulo en $\omega = \omega_n$ dice que vale G, luego: $|H(j.\omega_n)| = G = \frac{G.\omega_n^2}{|j.2.\zeta.\omega_n^2|} = \frac{G}{2.\zeta}$, de donde se tiene que $\boxed{\zeta = 0{,}5}$

Finalmente, la transferencia queda $\boxed{\frac{X}{V}(s) = \frac{20}{s^2 + 20s + 400}}$

Como $\zeta < 1/\sqrt{2}$, hay fenómeno de resonancia

Ejercicio 3 **(8 puntos)**

La forma de la respuesta escalón se puede asociar a la de un sistema de 2º orden sin ceros subamortiguado, cuya función de transferencia se puede expresar como: $\frac{G.\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \quad con\, \zeta < 1$

El tamaño de la entrada es 2 y el valor de régimen de la salida es 5, por lo que la ganancia en régimen es $G = 5/2 = 2{,}5$

El pico máximo de la salida es 7, por lo que el sobretiro es: $ST = (7-5)/5 = 0{,}4 = 40\%$. Como $\zeta^2 = \frac{\ln^2(ST)}{\ln^2(ST) + \pi^2}$, se obtiene el valor de $\zeta = 0{,}28$

Finalmente, se puede observar que:

1) La distancia entre picos es de aproximadamente 6,5 segundos. Por la expresión de la repuesta temporal de este sistema $G.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} sen\left(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}t + Arctg\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)\right)$, se tiene que $2.\pi = \omega_n.\sqrt{1-\zeta^2}.6{,}5$; de donde se despeja $\omega_n = 1$

2) Otra forma. Se sabe que el tiempo del pico máximo ocurre en $t_p = \frac{\pi}{\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}}$ y de la gráfica se observa que $t_p \cong 3{,}2$, y se llega a un resultado similar.

3) Una más: De la gráfica, el tiempo de asentamiento al 5% es algo menor a 11 segundos (entre 10,7 y 10,8) y como el $t_S^{5\%} \cong \frac{3}{\zeta\omega_n} \quad con\, 0 < \zeta < 0{,}6$, operando se llega a un resultado similar.

Ejercicio 4 **(9 puntos)**

1. Ecuaciones dinámicas del sistema.

Una ecuación es dada: $\dot{V} = 0{,}05.V_{ref} - \dfrac{1}{3+R_t}$, donde $R_t = R_0(1-\alpha.T_f)$

La otra se tiene del balance térmico al tanque: $C_c.\dot{T}_f = c.q.(T_i - T_f) + P$, donde P es la potencia eléctrica entregada por la resistencia R_p y vale: $P = \dfrac{V^2}{R_p}$

2. i) Linealizar el sistema entorno del punto de equilibrio P^{eq}: $T_i^{eq} = 290\ K$ $T_f^{eq} = 310\ K$

Las relaciones en el punto de equilibrio son:

(1) $0 = 0{,}05.V_{ref}^{eq} - \dfrac{1}{3+R_0.(1-\alpha.T_f^{eq})}$ de donde $V_{ref}^{eq} = \dfrac{20}{3+100.(1-3.10^{-3}.310)} = 2\,[V]$

(2) $0 = c.q.(T_i^{eq} - T_f^{eq}) + \dfrac{(V^{eq})^2}{R_p}$ de donde $V^{eq} = \sqrt{0{,}01.2000.0{,}01.(310-290)} = 2\,[V]$

La linealización resulta:

$$\dot{v} = 0{,}05.v_{ref} - \frac{R_0.\alpha}{\left(3+R_0.(1-\alpha.T_f^{eq})\right)^2}.t_f = 0{,}05.v_{ref} - 0{,}003.t_f$$

$$\dot{t}_f = \frac{c.q}{Cc}.(t_i - t_f) + \frac{2.V^{eq}}{Cc.R_p}.v = 0{,}04.(t_i - t_f) + 0{,}8.v$$

ii) El modelo matricial en variables de estado queda:

$$\begin{bmatrix} \dot{v} \\ \dot{t}_f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0{,}003 \\ 0{,}8 & -0{,}04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v \\ t_f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0{,}05 & 0 \\ 0 & 0{,}04 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{ref} \\ t_i \end{bmatrix}$$

$$[t_f] = [0 \quad 1] \begin{bmatrix} v \\ t_f \end{bmatrix} + [0 \quad 0] \begin{bmatrix} v_{ref} \\ t_i \end{bmatrix}$$