

---

# Sistemas de Comunicación

---

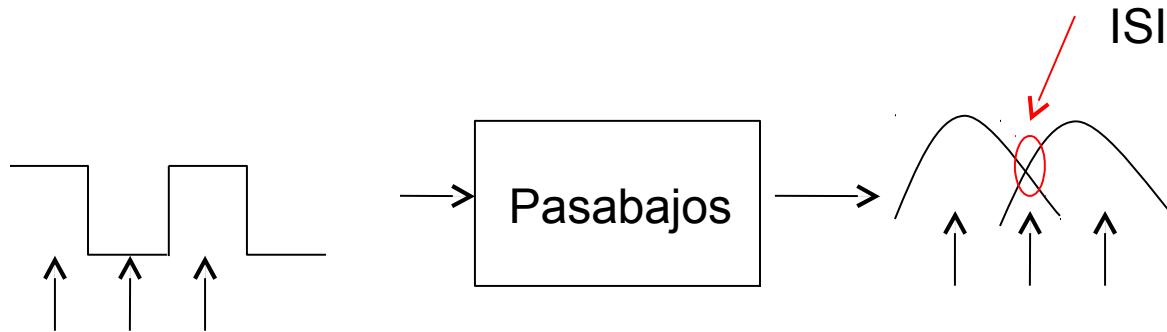
**Clase 15: Interferencia Intersimbólica**

# Objetivo

Diseño de sistemas digitales banda base en condiciones de ancho de banda limitado.

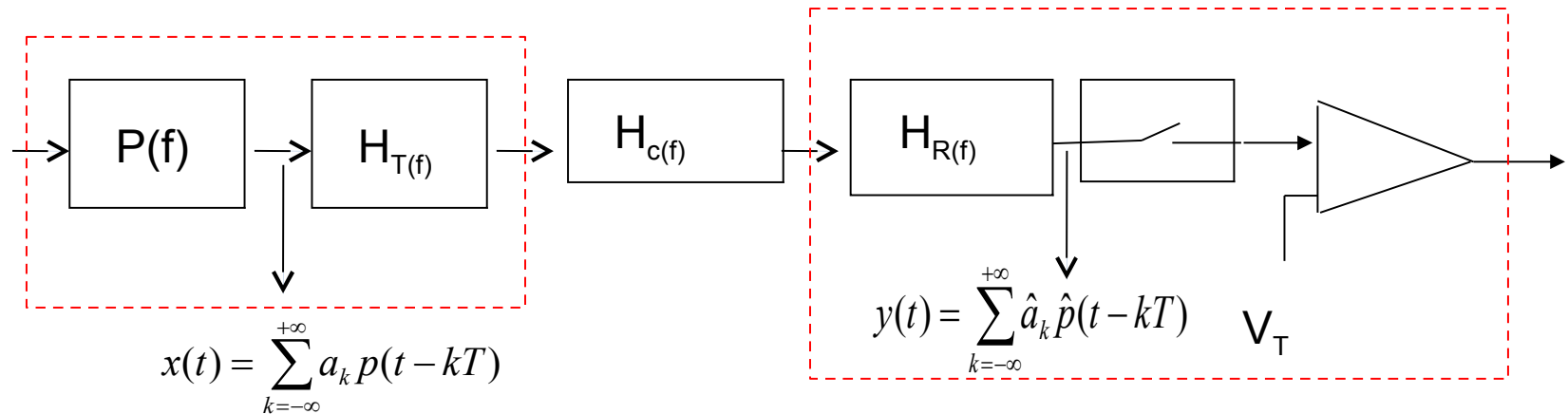
- Condiciones para que no exista ISI en el instante de muestreo.
  - Pulso de Nyquist
  - Ecualesadores
  - 
  - ¿Cuál es la máxima tasa de transmisión  $r$  si  $B_T$  es limitado?
  - ¿Cuál es la forma del pulso que permite recepción sin ISI a una tasa de transmisión  $r$ ?
-

# ISI: Interferencia Intersimbólica



- Existe ISI si el valor en el instante de muestreo depende de los bits adyacentes.

# Condición para que no exista ISI en recepción ( instante de muestreo)



Supuestos : Canal, TX y RX limitados en banda

$r = \frac{1}{T}$  cadencia de símbolos

¿Que forma tiene que tener  $\hat{p}(t)$  para no introducir ISI?

# Nyquist: condición no ISI

Condición para que no exista ISI con pulsos  $\hat{p}(t)$  transmitidos a una cadencia  $r$ , limitados en banda  $B$  :

$$\hat{p}(t) = \begin{cases} 1 & \text{en } t = 0 \\ 0 & \text{en } t = kT \end{cases}$$

$$\hat{P}(f) = 0 \quad \text{para } |f| \geq B \quad (1)$$

$$\text{donde } B = \frac{r}{2} + \beta \quad \text{con } 0 \leq \beta \leq \frac{r}{2}$$

$\beta$  : caracteriza el pulso

Nyquist dio condición y propuso familia de pulsos que la cumple

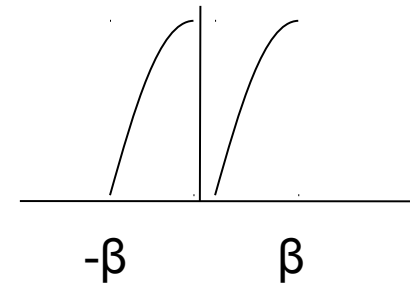
# Pulso de Nyquist: Teorema de Simetría Vestigial

Teorema : Las condiciones de no ISI establecidas en (1) se satisfacen si  $\hat{p}(t)$  es de la forma :

$$\hat{p}(t) = p_{\beta}(t) \text{sinc } rt$$

con :  $F(p_{\beta}(t)) = P_{\beta}(f) = 0$  para  $|f| > \beta$

$$y \quad p_{\beta}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} P_{\beta}(f) df = 1$$



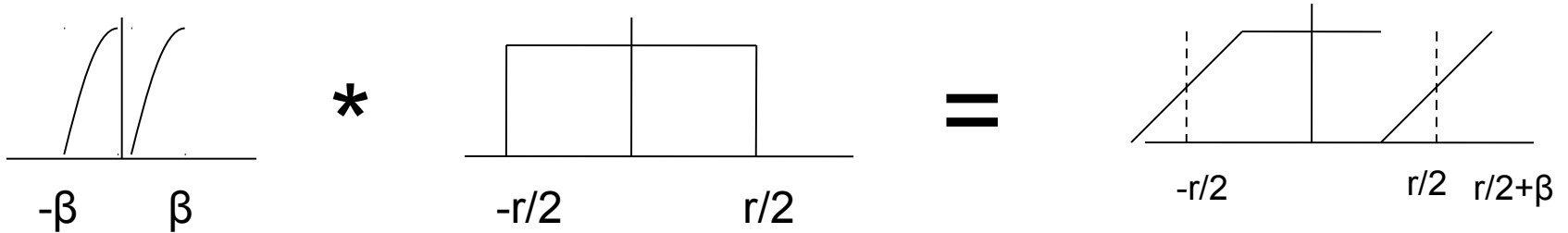
# Pulso de Nyquist

1.  $\hat{p}(0) = p_\beta(0) \text{sinc } 0 = 1$

$$\hat{p}(kT) = p_\beta(kT) \text{sinc}(kT) = 0$$

2.  $\hat{P}(f) = P_\beta(f) * \Pi(f/r)$

$$\hat{P}(f) = 0 \quad |f| > B \quad \text{con } B = r/2 + \beta, \quad 0 \leq \beta \leq r/2$$



# Pulso de Nyquist: Caso particular

$$\hat{p}(t) = \text{sinc}rt \quad p_\beta(0) = 1 \quad \beta = 0$$

$$B_{\text{mínimo}} = r/2$$

Para un  $r$  dado es la forma de pulso que requiere ancho de banda mínimo y no introduce ISI, aunque es muy sensible a errores de sincronismo en detección.

En forma dual es el pulso que transmite  $r_{\text{máximo}} = 2B_T$  para un ancho de banda de transmisión dado.

Veremos pulsos menos sensibles a error de sincronismo.

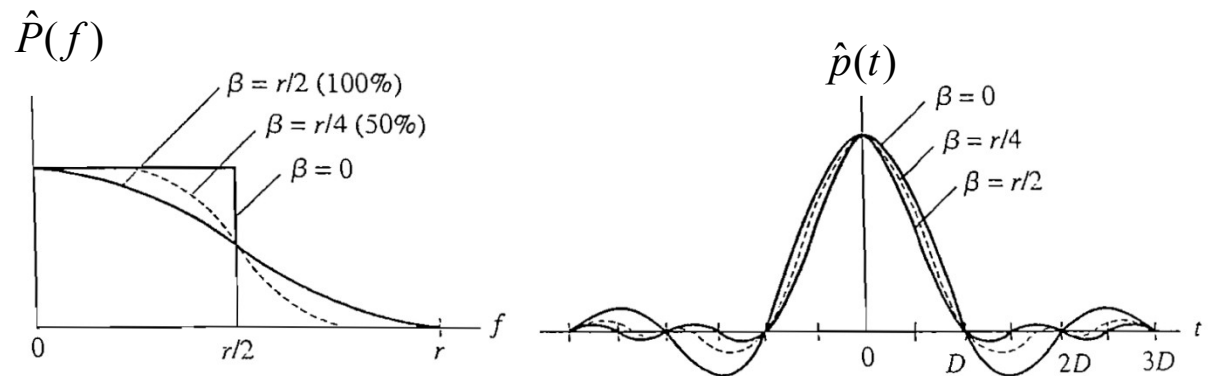


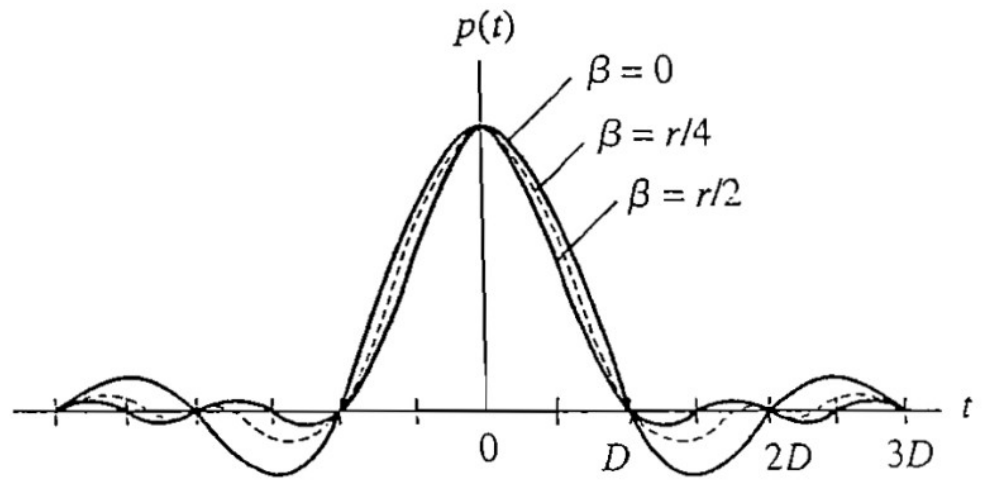
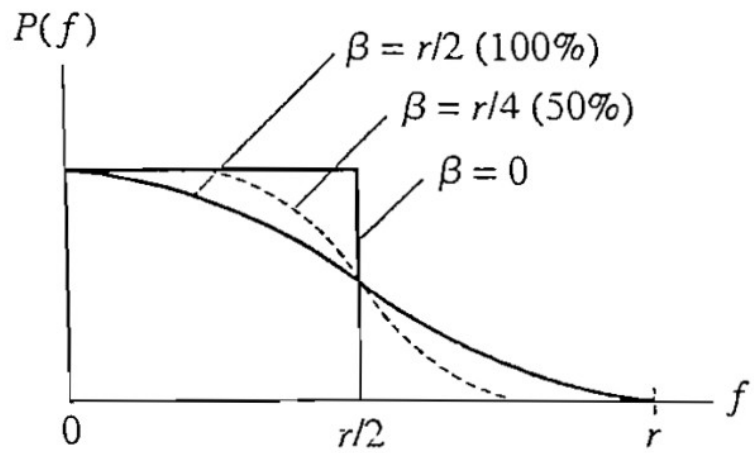
# Pulso Coseno

$$P_{\beta}(f) = \frac{\pi}{4\beta} \cos\left(\frac{\pi f}{2\beta}\right) \Pi\left(\frac{f}{2\beta}\right)$$

$$\hat{P}(f) = \begin{cases} 1/r & |f| < r/2 - \beta \\ 1/r \cos^2\left(\frac{\pi f}{4\beta}\right) (|f| - r/2 + \beta) & r/2 - \beta < |f| < r/2 + \beta \\ 0 & |f| > r/2 + \beta \end{cases}$$

$$\hat{p}(t) = \frac{\cos 2\pi\beta t}{1 + (4\beta t)^2} \text{sinc} r t$$





# Factor de roll off

$$\text{Defino } \rho = \frac{\beta}{r/2} \begin{cases} \rho = 0 & \beta = 0 \\ \rho = 1/2 & \beta = r/4 \\ \rho = 1 & \beta = r/2 \end{cases}$$

$$B = r/2 + \beta = r/2(1 + \rho) \quad \text{con } 0 < \rho < 1$$

# Coseno Elevado

$$\rho = 1$$

$$\hat{P}(f) = \frac{1}{2r} \left( 1 + \cos \frac{\pi f}{r} \right) \quad \text{para } |f| \leq r \quad \hat{p}(t) = \frac{\text{sinc } 2rt}{1 - (2rt)^2}$$

Tiene cruces adicionales por cero en  $t = 1.5T, 2.5T, \dots$

Se desbanece más lento el espectro cuando aumenta  $\rho$ .

Aumenta inmunidad frente a falta de sincronismo pero tiene como penalidad un 50% de reducción de  $r$  respecto al máximo posible para un  $B_T$  dado.

# Ecualización

¿Como diseño el sistema cuando el canal y los filtros son reales? Diseño tal que :

$$\hat{P}(f)e^{-j\omega t_d} = kP(f)H_T(f)H_R(f)H_c(f)$$

Enfoques complementarios :

1. Filtros termináles óptimos.

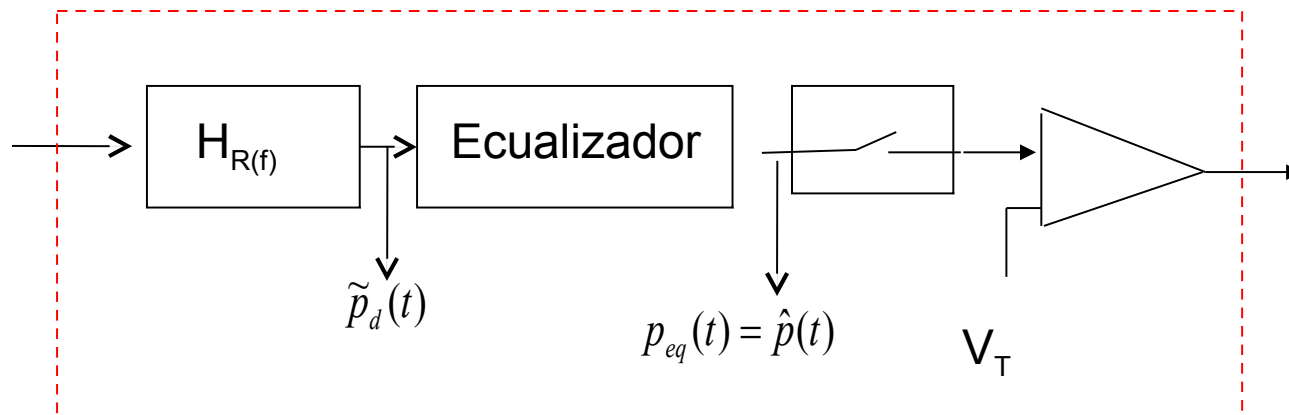
$$|H_T(f)|^2 = \frac{k|\hat{P}(f)|}{\sqrt{G_n(f)}|H_c(f)|}$$
$$|H_R(f)|^2 = \frac{|\hat{P}(f)|\sqrt{G_n(f)}}{k|P(f)|^2|H_c(f)|}$$

2. Ecualizadores.

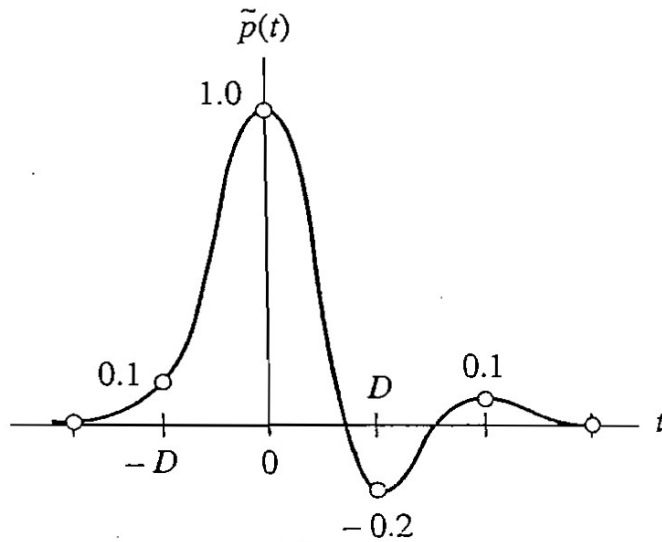
# Ecualización:

No importa que forma de pulso elija siempre existe una cierta cantidad de ISI como resultado del diseño imperfecto de los filtros y el conocimiento incompleto y variable de las características del canal.

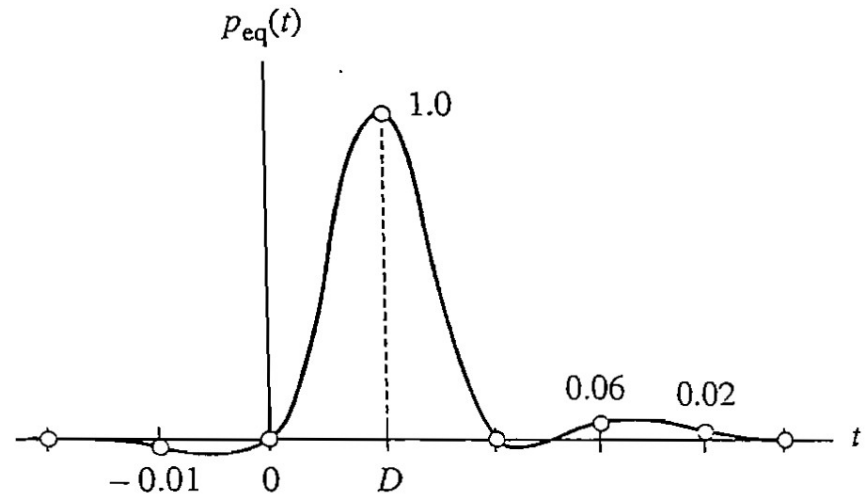
Se necesita utilizar filtros ecualizadores en el receptor



# Ecualización

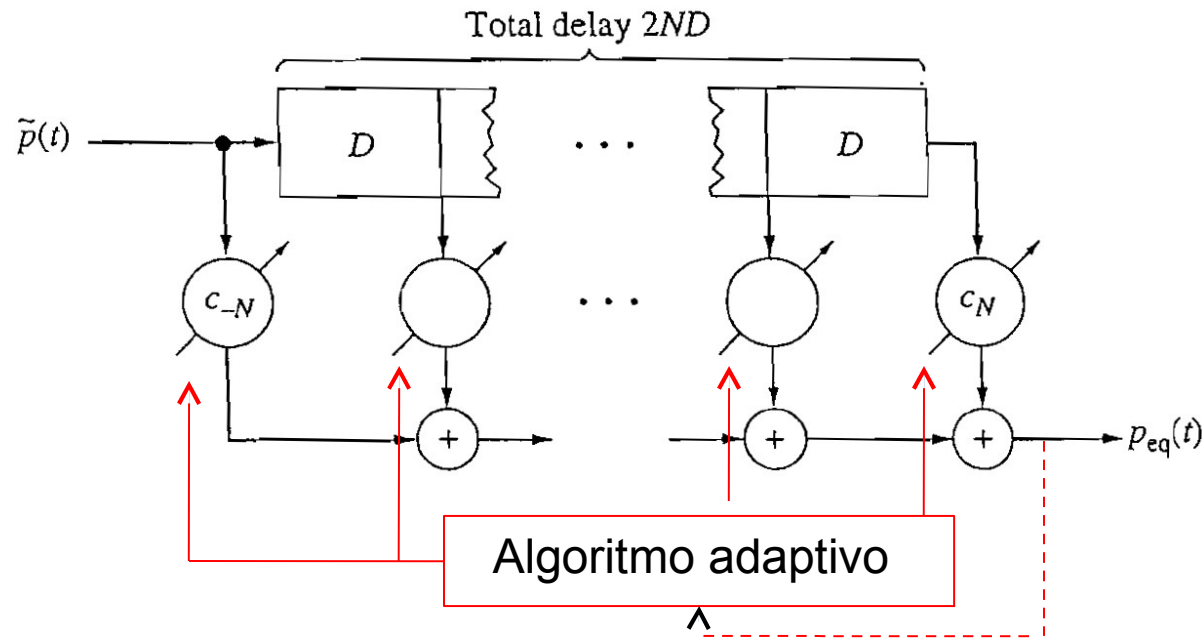


Pulso distorsionado



Pulso ecualizado

# Ecualizador- filtro transversal



Coeficientes fijos: estimados a partir de una secuencia de entrenamiento

Adaptivos: se ajustan cada cierto tiempo (variación lentas fading)



# Ecuador

$$p_{eq}(t) = \sum_{n=-N}^N c_n \tilde{p}_d(t - nT - NT)$$

muestreo en  $t_k = kT + NT$

$$p_{eq}(t_k) = \sum_{n=-N}^N c_n \tilde{p}_d(kT - nT)$$

$$\text{FIR: } p_{eq}(k) = \sum_{n=-N}^N c_n \tilde{p}_d(k - n) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$p_{eq}(k) = \begin{cases} 1 & k = 0 \\ 0 & k = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N \end{cases}$$

# Forzador a cero

Supongo que el canal varía lentamente. Ajusto  $c_k$  utilizando secuencia de entrenamiento. Impongo que la salida valga cero en  $kT \neq 0$  y 1 en  $kT=0$ .

$$\begin{bmatrix} \tilde{p}_0 & \cdots & \tilde{p}_{-2N} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{p}_{N-1} & \cdots & \tilde{p}_{-N-1} \\ \tilde{p}_N & \cdots & \tilde{p}_{-N} \\ \tilde{p}_{N+1} & \cdots & \tilde{p}_{-N+1} \\ \vdots & & \vdots \\ \tilde{p}_{2N} & \cdots & \tilde{p}_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-N} \\ \vdots \\ c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \\ \vdots \\ c_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Razonable si no existe mucho ruido superpuesto.

---

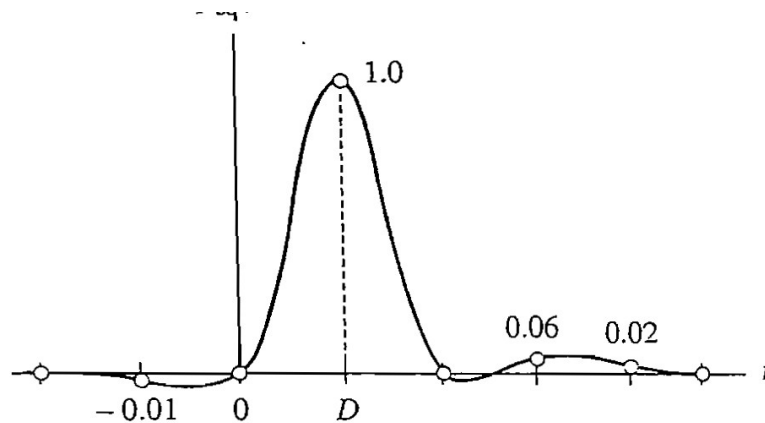
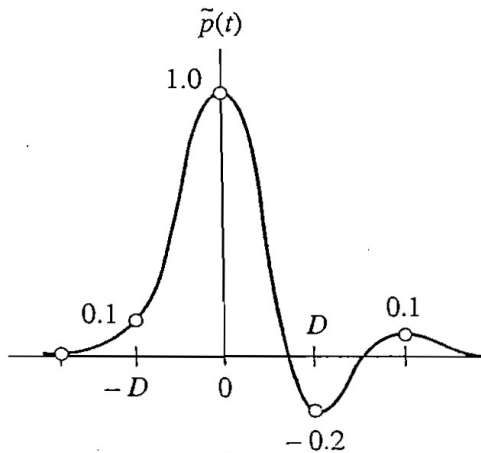
# Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1.0 & 0.1 & 0.0 \\ -0.2 & 1.0 & 0.1 \\ 0.1 & -0.2 & 1.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-1} \\ c_0 \\ c_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$c_{-1} = -0.096$$

$$c_0 = 0.96$$

$$c_1 = 0.2$$



Carlson 11-3

# Ecualizador

Un ecualizador más robusto se obtiene eligiendo los  $c_n$  que minimizan el error cuadrático entre el valor estimado y el deseado.

$$c_n = \frac{R_{p_{eq} \tilde{p}_d}}{R_{\tilde{p}_d \tilde{p}_d}}$$