Receptor de Correlación

Sistemas de Comunicación

Facundo Mémoli*

-Versión 2.0-

mayo, 2002

*memoli@iie.edu.uy

Índice

1. Introducción

Los Receptores de Correlación se *infieren* de un proceder Probabilístico. Miraremos el problema de la detección de señales Banda Base en forma abstracta (Probabilística), y diseñaremos un procedimiento *Óptimo* para efectuar la detección. Veremos luego que el resultado de este procedimiento coincide en términos de performance con el Filtro Acoplado, ver §5. Esta coincidencia va a demostrar que el receptor del filtro apareado es óptimo. Eso es porque en el diseño del mismo supusimos de antemano una forma dada para el receptor, algo que en el presente reporte no haremos: la forma del receptor se *inferirá* de los resultados que obtengamos, haciendo eso que el receptor de correlación sea el verdadero receptor óptimo. Sin embargo, como ya dijimos, sucederá que bajo ciertas hipótesis, los dos receptores tendrán la mismo performance, lo que prueba la optimalidad del receptor que usa el filtro acoplado en esas hipótesis.

2. Hipótesis y Planteo del Problema

Asumiremos inicialmente que estamos en el caso *Binario*. Para nosotros H_0 y H_1 denotarán estar en las *Hipótesis* 0 y 1 respectivamente. P_0 y P_1 denotarán las probabilidades de que se haya enviado un 0 y un 1 respectivamente ($P_0+P_1 = 1$). Además para simplificar asumiremos que la señalización es *Polar*:

H_0) $x(t) = n(t)$.

H_1) $x(t) = Ap(t) + n(t)$.

donde $x(t)$ es la señal a la entrada del *Receptor*[1], $p(t)$ es el *pulso*(que asumiremos de *duración* T), A es alguna constante y $n(t)$ es el proceso de *ruido* sobre el que más adelante haremos hipótesis precisas, ver §3.1.

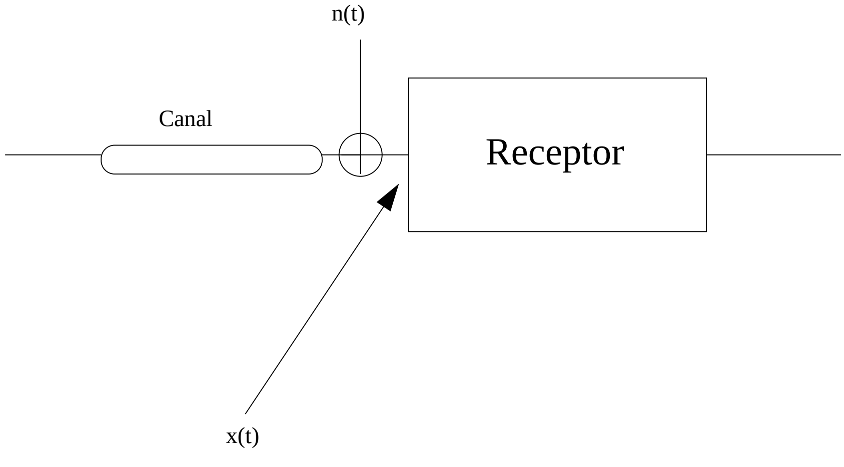

Figura 1: Sistema de Recepción.

[1] Ver la Figura 1.

$P(H_i|H_j)$ denotará la probabilidad de que en Recepción se esté en la *hipótesis* H_i mientras que en Transmisión se estuvo en la *hipótesis* H_j.

Objetivo

Minimizar

$$P_e = P(H_0)P(H_1|H_0) + P(H_1)P(H_0|H_1) \tag{1}$$

Criterio

El mejor Receptor será el que *minimiza* P_e dada por (1).

3. Procedimiento

Supondremos que estamos ubicados en el *Receptor* y que estamos perfectamente sincronizados con el *Transmisor*, en el sentido de que conocemos con exactitud los instantes en que hay cambio de símbolo transmitido, es decir las fronteras entre los intervalos en los que se está mandando un símbolo. Esos intervalos, como ya dijimos, tienen duración T. Tomaremos m muestras de la señal $x(t)$ en cada intervalo, para formar el vector de muestras $\underline{X}$.

Supongamos momentáneamente que conocemos las *densidades* $f(\underline{X}|H_0)$ y $f(\underline{X}|H_1)$. Consideremos el *Espacio de Observación* $\mathcal{Z}$ que contiene todos los posibles valores del vector de observación $\underline{X}$.

La idea es dividir $\mathcal{Z}$ según el criterio de minimizar la Probabilidad de Error dada por la expresión (1), en dos sub-espacios, $\mathcal{Z}_0$ y $\mathcal{Z}_1$. Por ejemplo, si el vector de observación cayera dentro de $\mathcal{Z}_0$, diríamos que la *Hipótesis* válida (en Transmisión) es H_0; y si no, H_1.

Procedamos así. Tenemos que

$$P(H_1|H_0) = \int_{\mathcal{Z}_1} f(\underline{X}|H_0)\ d\underline{X}$$

$$P(H_0|H_1) = \int_{\mathcal{Z}_0} f(\underline{X}|H_1)\ d\underline{X}$$

De modo que

$$P_e = P(H_0)\int_{\mathcal{Z}_1} f(\underline{X}|H_0)\ d\underline{X}\ +\ P(H_1)\int_{\mathcal{Z}_0} f(\underline{X}|H_1)\ d\underline{X}$$

Ahora, como $\mathcal{Z} = \mathcal{Z}_0 \cup \mathcal{Z}_1$ entonces $\mathcal{Z}_1 = \mathcal{Z}\backslash\mathcal{Z}_0$[2], de modo que:

$$P_e = P(H_0)\int_{\mathcal{Z}\backslash\mathcal{Z}_0} f(\underline{X}|H_0)\ d\underline{X}\ +\ P(H_1)\int_{\mathcal{Z}_0} f(\underline{X}|H_1)\ d\underline{X}$$

[2] Para conjuntos A y B, el conjunto $A\backslash B$ denota la parte de A que no está en B.

$$P_e = P(H_0)\int_{\mathcal{Z}} f(\underline{X}|H_0)\ d\underline{X}\ +\ \int_{\mathcal{Z}_0} [P(H_1)f(\underline{X}|H_1) - P(H_0)f(\underline{X}|H_0)]\ d\underline{X}$$

pero $\int_{\mathcal{Z}} f(\underline{X}|H_0)\ d\underline{X} = 1$, de manera que finalmente obtenemos

$$P_e = P(H_0)\ +\ \int_{\mathcal{Z}_0} [P(H_1)f(\underline{X}|H_1) - P(H_0)f(\underline{X}|H_0)]\ d\underline{X} \tag{2}$$

Ahora la idea es elegir $\mathcal{Z}_0$ de modo de hacer la expresión dada por (2) lo más pequeña posible. Para eso miramos la integral sobre $\mathcal{Z}_0$ y hacemos el integrando lo más pequeño posible. Con las elecciones a continuación logramos que esa integral sea no positiva y lo más pequeña posible (para convencerse basta imaginar una modificación cualquiera de $\mathcal{Z}_0$ y ver que esta hacer crecer el valor de la integral que segundo miembro de (2)).

- Si $P(H_1)f(\underline{X}|H_1) > P(H_0)f(\underline{X}|H_0) \longrightarrow \underline{X} \in \mathcal{Z}_1$
- Si $P(H_1)f(\underline{X}|H_1) < P(H_0)f(\underline{X}|H_0) \longrightarrow \underline{X} \in \mathcal{Z}_0$

Una forma más metódica (y correcta) de justificar el paso anterior se puede inferir del siguiente lema cuuya demostración es **Ejercicio**:

> **Lema** Sea $f : I\!R \to I\!R$ una función continua tal que $\int_{I\!R} f(x)dx = F$. Entonces
>
> $$\min_{\Omega \subseteq I\!R} \int_{\Omega} f(x)dx = F - \int_{\Omega_f^+} f(x)dx = \int_{\Omega_f^-} f(x)dx$$
>
> donde $\Omega_f^+ = \{x \in I\!R : f(x) > 0\}$ y $\Omega_f^- = \{x \in I\!R : f(x) < 0\}$

Con frecuencia se define la función

$$\mathbf{\Lambda}(\underline{X}) \triangleq \frac{f(\underline{X}|H_1)}{f(\underline{X}|H_0)} \tag{3}$$

Y la regla de decisión se transforma en mirar

$$\mathbf{\Lambda}(\underline{X}) \gtrless \frac{P(H_0)}{P(H_1)} \tag{4}$$

y decidir H_1 si se da el "$>$" y H_0 en caso contrario.

3.1. Hipótesis Sobre el Ruido y Cómo Seguir

De acuerdo con lo que hemos hecho hasta ahora, necesitamos conocer las densidades de probabilidad $f(\underline{X}|H_i)$. Para ello vamos a hacer hipótesis sobre el ruido, que es el objeto *Estocástico* que hay en todo esto. Asumiremos que el Ruido $n(t)$ es **Blanco** (de *Densidad Espectral de Potencia* $\frac{\eta}{2}$) y **Gaussiano**. Estas hipótesis han de ser manejadas con cuidado! Pués como $n(t)$ es un *Proceso Estocástico Continuo*, al ser blanco su *Autocorrealación* es $R_n(\tau) = \frac{\eta}{2}\delta(\tau)$, de modo que su potencia sería *Infinita*!!.

Para ello procedermos así: en lugar de trabajar con el ruido blanco $n(t)$, lo vamos a "recortar", usando un filtro pasabajos a cuya frecuencia de corte llamaremos B, para obtener el nuevo proceso $n_B(t)$. Más adelante haremos $B \uparrow \infty$). Así que

$$G_{n_B}(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$$

$$R_{n_B}(\tau) = \eta B \; sinc(2Bt)$$

La razón más fuerte para imponer la hipótesis de ruido *Blanco-Gaussiano* viene dada por la siguiente idea: estamos ahora tratando de encontrar las densidades $f(\underline{X}|H_i)$, y se tiene que $\underline{X}_k = n(t_k)$ en la hipótesis H_0 o bien $\underline{X}_k = Ap(t_k) + n(t_k)$ en la hipótesis H_1. De modo que si asumimos que el ruido es gaussiano, cada $n(t_k)$ va a ser una VA gaussiana, lo que implica que la densidad de probabilidad de cada $\underline{X}_k$ también lo va a ser (sólo cambiará la media; la *desviación estandar* será la misma para ambas hipótesis). Si todas las $\underline{X}_k$ fueran *independientes* entre si (para ambas hipótesis) tendríamos algo de la forma:

$$f(\underline{X}|H_i) = f^i_{\underline{X}_1}(X_1) \times \ldots \times f^i_{\underline{X}_m}(X_m)$$

donde $\underline{X} = (X_1, \ldots, X_m)$ y $f^i_{\underline{X}_k}(\cdot)$ denota la densidad de probabilidad de la VA $\underline{X}_k = x(t_k)$ en la hipótesis H_i.

Ahora, la forma más sencilla de lograr esa *Independencia* es recordar el siguiente resultado que nunca se debería olvidar

VA's Gaussianas y <u>No Correlacionadas</u> son **Independientes**

Ahora tenemos que juntar todo esto y hacerlo funcionar. Como ya es evidente va a haber que relacionar m con B y T. Sencillamente muestreariámos cada $\frac{1}{2B}$ segundos (Para que la correlación entre diferentres muestras sea nula), de modo que tomamos

$$\frac{1}{2B} = \frac{T}{m-1} \tag{5}$$

Tenemos entonces que $f^0_{\underline{X}_k}(x) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_B^2)$ y $f^1_{\underline{X}_k}(x) \sim \mathcal{N}(A\,p(t_k), \sigma_B^2)$ con $\sigma_B^2 = R_{n_B}(0) = \eta B$. O sea que podemos escribir (**Ejercicio**):

$$f(\underline{X}|H_0) = \frac{1}{(2\pi\sigma_B^2)^{\frac{m}{2}}} e^{-\sum_{k=1}^m \frac{X_k^2}{2\sigma_B^2}}$$

$$f(\underline{X}|H_1) = \frac{1}{(2\pi\sigma_B^2)^{\frac{m}{2}}} e^{-\sum_{k=1}^m \frac{(X_k - A\,p(t_k))^2}{2\sigma_B^2}}$$

Entonces:

$$\ln \mathbf{\Lambda}(\underline{X}) = \ln(f(\underline{X}|H_1)) - \ln(f(\underline{X}|H_0))$$

$$= \frac{1}{2\sigma_B^2}\left(\sum_{k=1}^{m} X_k^2 - \sum_{k=1}^{m}(X_k - A\,p(t_k))^2\right)$$

Así:

$$\ln \mathbf{\Lambda}(\underline{X}) = \frac{1}{2\sigma_B^2}\sum_{k=1}^{m}\left(2A\,p(t_k)X_k - A^2p^2(t_k)\right)$$

Ahora la *Regla de Decisión* dada por (4) se transforma en

$$\ln \mathbf{\Lambda}(\underline{X}) \overset{H_1}{\gtrless} \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) \tag{6}$$

que es equivalente a (tomando en cuenta (5) que $B = \frac{1}{2\Delta T}$, con $\Delta T = \frac{T}{m-1}$) (**Ejercicio**)

$$\frac{2A}{\eta}\sum_{k=1}^{m} p(t_k)x(t_k)\,\Delta T \;\overset{H_1}{\gtrless}\; \frac{A^2}{\eta}\sum_{k=1}^{m} p^2(t_k)\,\Delta T \;+\; \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) \tag{7}$$

3.2. La Regla Final

Ahora tomar $m \uparrow \infty$ implica $B \uparrow \infty$ (o sea que en el límite recuperamos la hipótesis de Ruido Blanco, que habíamos debilitado) y $\Delta T \downarrow 0$, de modo que de (7) concluímos que la regla de decisión se transforma en:

$$\frac{2A}{\eta}\int_0^T p(t)\,x(t)\,dt \;\overset{H_1}{\gtrless}\; \frac{A^2}{\eta}\int_0^T p^2(t)\,dt \;+\; \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) \tag{8}$$

El Receptor naturalmente debe conocer $P(H_0)$, $P(H_1)$ y la forma del pulso $p(t)$ (y también A). Así que si definimos la constante

$$\lambda \triangleq \frac{\eta}{2\,A}\ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right) \;+\; \frac{A}{2}\int_0^T p^2(t)\,dt$$

que es de conocimiento del Receptor. La decisión se transforma en:

$$\int_0^T p(t)\,x(t)\,dt \;\overset{H_1}{\gtrless}\; \lambda \tag{9}$$

4. El Receptor de Correlación

De esta última expresión *inferimos* el **Receptor de Correlación** que mostramos en la Figura 2.

Se puede demostrar (**Ejercicio**) que en el caso de tener pulsos distintos para cada hipótesis:

H_0) $x(t) = a_0(t) + n(t)$.

H_1) $x(t) = a_1(t) + n(t)$.

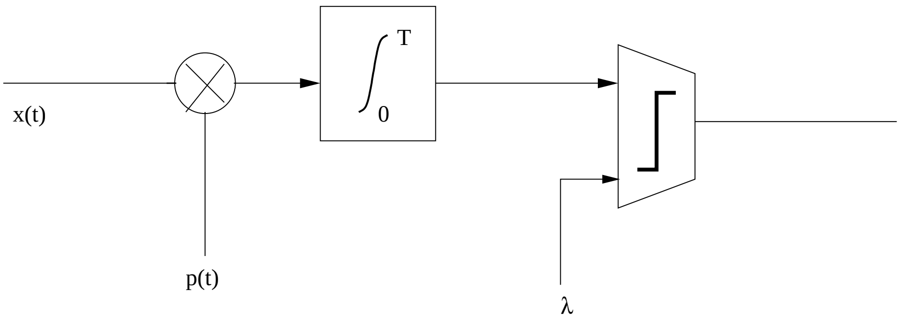

Figura 2: Receptor de Correlación.

la regla decisión se transforma en

$$\int_0^T [a_1(t) - a_0(t)]\, x(t)\, dt \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{1}{2}\int_0^T [a_1^2(t) - a_0^2(t)]\, dt \;+\; \frac{\eta}{2} \ln\left(\frac{P(H_0)}{P(H_1)}\right)$$

de la cual se *inferiere* una vez más la forma del Receptor Óptimo, ver Figura 3.

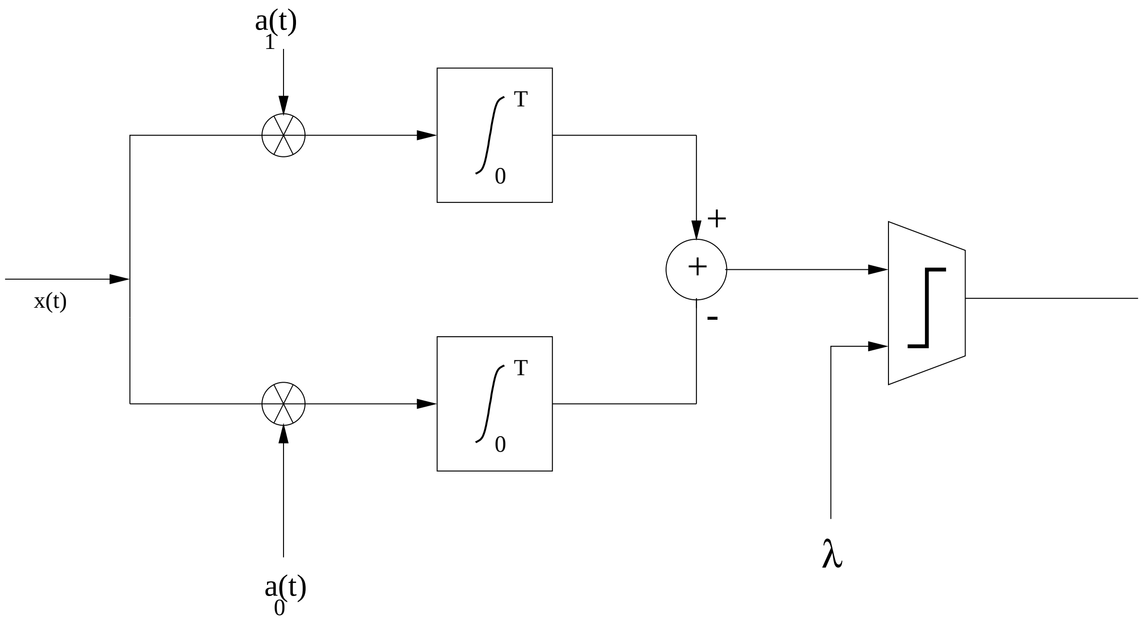

Figura 3: Receptor de Correlación para el caso Polar.

Para señales M-arias equiprobables se puede hacer un análisis similar muy sencillo, y es nuevamente **Ejercicio**. En el Práctico de la asignatura se verán más ejercicio relativos a este tema.

5. Equivalencia con Filtros Acoplados

Se puede probar y es **Ejercicio** que la *Performance* de ambos sistemas es la misma. Es importante señalar que mientras para el Filtro Acoplado usamos una estructura particular para el Receptor, en el caso del Receptor de Correlación, la estructurá se *dedujo* de un análisis Abstracto de la situación. El que ambas performances sean iguales *valida* el uso del Filtro Acoplado.

6. Bibliografía

Sklar, lo tenemos en el IIE, pedirlo; y Carlson (3ra Edición) Appendix C.