

## 18 ANÁLISIS EN EL DOMINIO DE LA FRECUENCIA

El análisis en el dominio de la frecuencia es una herramienta clásica en la teoría de control, si bien en general los sistemas que varían con una periodicidad definida no suelen ser los más comunes en la ingeniería de procesos. En la actualidad, con el desarrollo de herramientas computacionales la simulación en el dominio del tiempo es mucho más sencilla y en consecuencia este tipo de análisis ha perdido algo de importancia práctica para el ingeniero de procesos. No obstante, sigue teniendo un valor conceptual y una sencillez en la comprensión intuitiva muy importantes. Veremos entonces algunos elementos muy primarios, como para tener una primera aproximación.

Sea  $G(s)$  la función de transferencia de un sistema lineal al que se le aplica una señal de entrada que varía sinusoidalmente con el tiempo,  $x(t) = A \sin \omega t$ . Por lo tanto, la respuesta estará dada por

$$Y(s) = \frac{A\omega}{s^2 + \omega^2} G(s)$$

Si las raíces de la ecuación característica del sistema son distintas se podrá realizar la siguiente expansión:

$$Y(s) = \frac{K_1\omega + K_2s}{s^2 + \omega^2} + \frac{K_3}{s + \lambda_3} + \frac{K_4}{s + \lambda_4} + \dots$$

Y por lo tanto la respuesta en el dominio del tiempo será

$$y(t) = K_1 \sin \omega t + K_2 \cos \omega t + K_3 e^{-\lambda_3 t} + K_4 e^{-\lambda_4 t} + \dots$$

Los términos exponenciales tienden a cero con el tiempo, por lo que si no tomamos en cuenta la porción inicial de la respuesta

$$y(t) \cong K \sin(\omega t + \phi)$$

Esto es, la respuesta a largo plazo del sistema al que se le aplica una señal sinusoidal es también sinusoidal. El mismo resultado se obtiene si se consideran raíces repetidas y en el caso de que tenga una raíz nula aparece además un término constante.

Volviendo nuevamente a la expresión en el dominio de Laplace, multiplicando por  $s^2 + \omega^2$  en ambos lados de la igualdad

$$A\omega G(s) = K_1\omega + K_2s + (s^2 + \omega^2) \left[ \frac{K_3}{s + \lambda_3} + \dots \right]$$

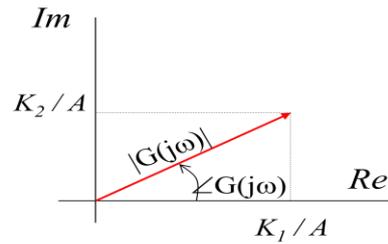
Expresión que evaluada en  $s = j\omega$  resulta

$$A\omega G(j\omega) = K_1\omega + K_2j\omega$$

O bien

$$G(j\omega) = \frac{K_1}{A} + j \frac{K_2}{A}$$

Esta expresión se puede representar en el plano imaginario como un fasor



y puede expresarse el módulo y el ángulo de desfase de la siguiente manera

$$|G(j\omega)| = \sqrt{\left(\frac{K_1}{A}\right)^2 + \left(\frac{K_2}{A}\right)^2} = \frac{\sqrt{K_1^2 + K_2^2}}{A}$$

$$\angle G(j\omega) = \arctan \frac{K_2/A}{K_1/A} = \arctan \left( \frac{K_2}{K_1} \right)$$

O bien

$$|G(j\omega)| = \frac{K}{A}$$

$$\angle G(j\omega) = \phi$$

En particular para procesos de primer orden cuya  $G(s) = \frac{K}{\tau s + 1}$  la respuesta en el dominio del tiempo a una entrada sinusoidal es

$$y(t) = \frac{KA}{\omega^2 \tau^2 + 1} (\omega \tau e^{-t/\tau} - \omega \tau \cos \omega t + \sin \omega t)$$

Pero el término exponencial decae con el tiempo y queda

$$y(t) = \frac{KA}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}} \sin(\omega t + \phi)$$

donde  $\phi = -\tan^{-1}(\omega \tau)$

y la amplitud de la salida es  $\hat{A} = \frac{KA}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$

Muchas veces se habla de amplitud relativa:  $AR = \frac{\hat{A}}{A} = \frac{K}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$

E incluso de amplitud relativa normalizada:  $AR_N = \frac{1}{\sqrt{\omega^2 \tau^2 + 1}}$

En términos generales  $AR = \frac{\sqrt{Re^2 + Im^2}}{A}$   $\phi = \tan^{-1}(Im/Re)$

Si una función de transferencia se puede factorar según  $G(s) = \frac{G_a(s)G_b(s)G_c(s)\dots}{G_1(s)G_2(s)G_3(s)\dots}$

Entonces se sustituye  $s$  por  $j\omega$   $G(j\omega) = \frac{G_a(j\omega)G_b(j\omega)G_c(j\omega)\dots}{G_1(j\omega)G_2(j\omega)G_3(j\omega)\dots}$

$$|G(j\omega)| = \frac{|G_a(j\omega)||G_b(j\omega)||G_c(j\omega)|\dots}{|G_1(j\omega)||G_2(j\omega)||G_3(j\omega)|\dots}$$

$$\angle G(j\omega) = \angle G_a(j\omega) + \angle G_b(j\omega) + \angle G_c(j\omega) + \dots$$

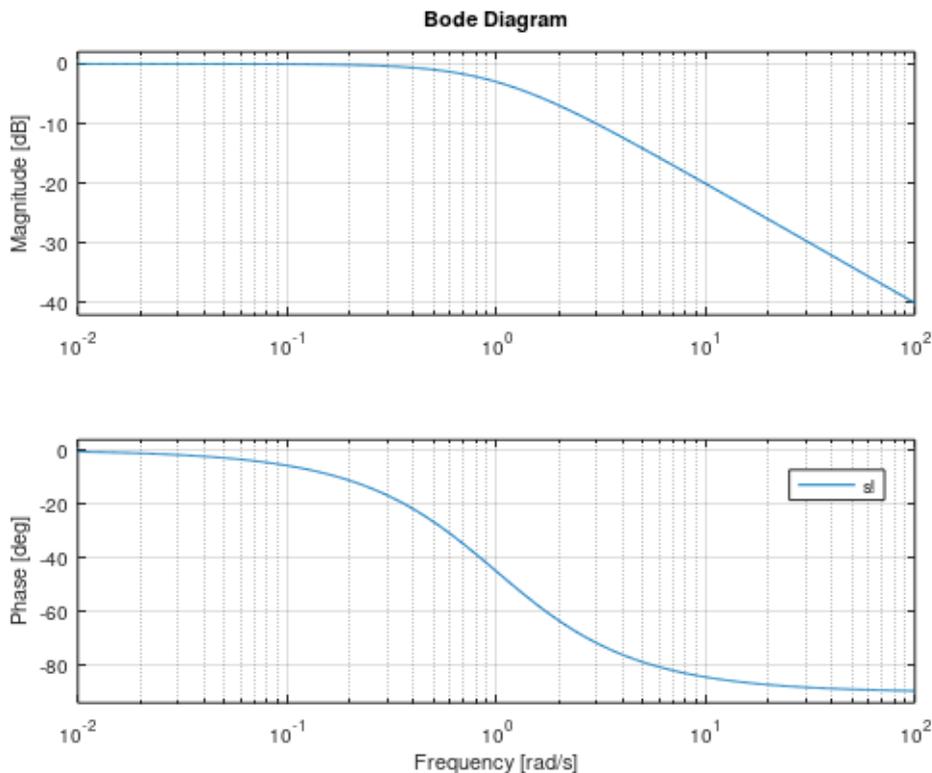
$$- [\angle G_1(j\omega) + \angle G_2(j\omega) + \angle G_3(j\omega) + \dots]$$

Existen varias formas de representar la información de un proceso en forma gráfica en el dominio de la frecuencia. Una de ellas es mediante los diagramas de Bode, donde se representan la amplitud y el ángulo de desfase en función de la frecuencia (normalmente en escala logarítmica).

Por ejemplo si representamos el sistema de primer orden  $G(s) = \frac{1}{\tau s + 1}$  con  $\tau = 1$ , recordando que

$$A = \frac{1}{\sqrt{\omega^2\tau^2 + 1}} \quad \phi = -\arctan(\omega\tau)$$

La función de Octave es *bode(sl)*.



Muchas veces en los gráficos de Bode la magnitud aparece en decibelios ( $20\log_{10}AR$ ) pero en general escala logarítmica, lo mismo que la frecuencia.

Puede observarse que los límites a ambos extremos del diagrama para la amplitud son

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 \tau^2}} = 1$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \log |G(j\omega)| = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \left( -\log \sqrt{1 + \omega^2 \tau^2} \right) =$$

$$= -\log \omega \tau = -\log \omega - \log \tau$$

O, más en general, el límite hacia bajas frecuencias tiende a la ganancia de la función de transferencia y el límite hacia altas frecuencias es una recta de pendiente -1 en el diagrama log-log. La prolongación de esta recta hasta el corte con la asíntota horizontal nos da  $1/\tau$ .

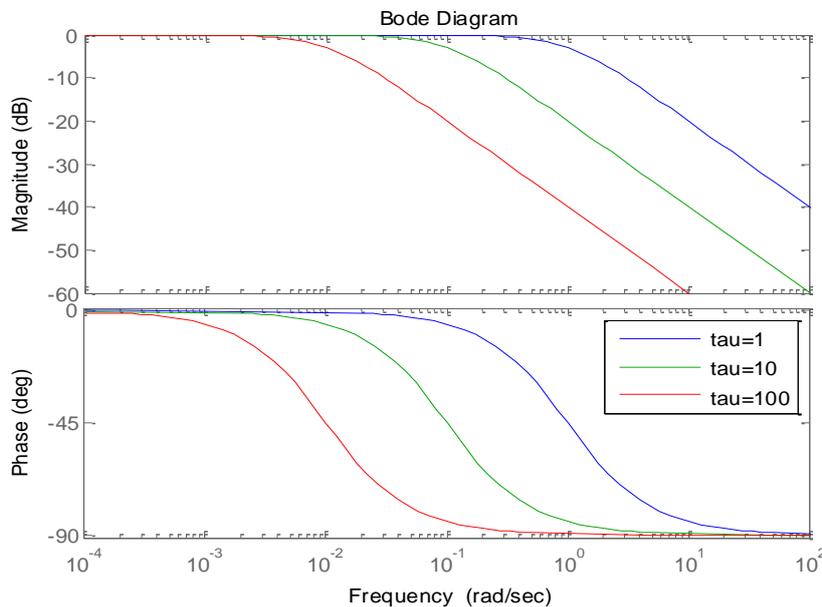
Y para el ángulo de fase

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow 0} \arctan(-\omega \tau) = 0$$

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \angle G(j\omega) = \lim_{\omega \rightarrow \infty} \arctan(-\omega \tau) = -90^\circ$$

Las curvas del ángulo de fase tienen un punto de inflexión a  $-45^\circ$  y son asíntóticas en forma horizontal a 0 y  $-90^\circ$  a izquierda y derecha respectivamente.

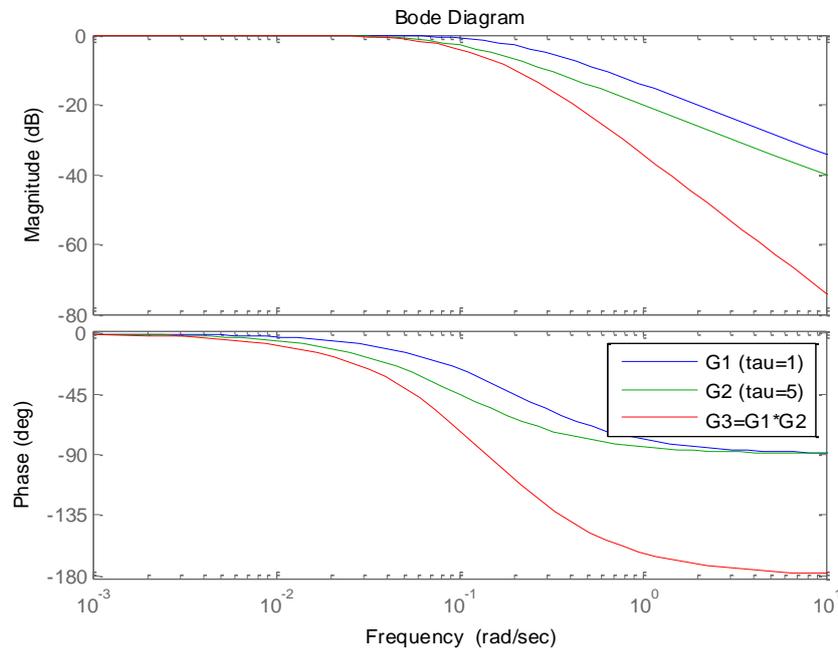
A medida que aumenta  $\tau$  las curvas conservan la misma forma pero se corren para la izquierda:



Un sistema de segundo orden puede ser concebido como el producto de dos de primer orden, por ejemplo

$$G_1 = \frac{1}{s+1} \quad G_2 = \frac{1}{5s+1} \quad G_3 = G_1 * G_2$$

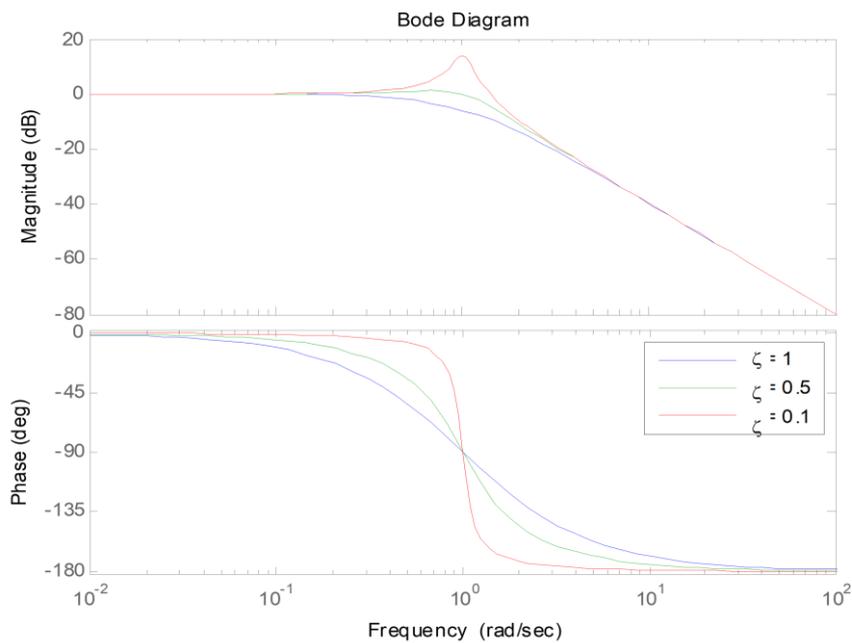
En este caso, a frecuencias altas la amplitud tendrá pendiente -2 (en escala log-log) y el ángulo de fase tiende a  $-180^\circ$ .



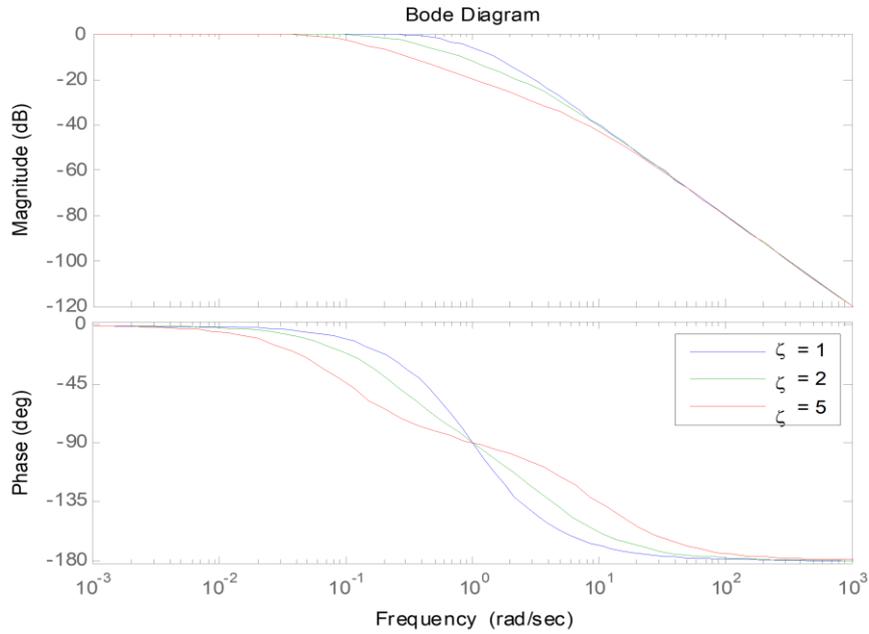
Si es un sistema de segundo orden subamortiguado

$$G(s) = \frac{1}{\tau^2 s^2 + 2\tau\zeta s + 1}$$

se forma un “hombro” que depende del factor de dumping:

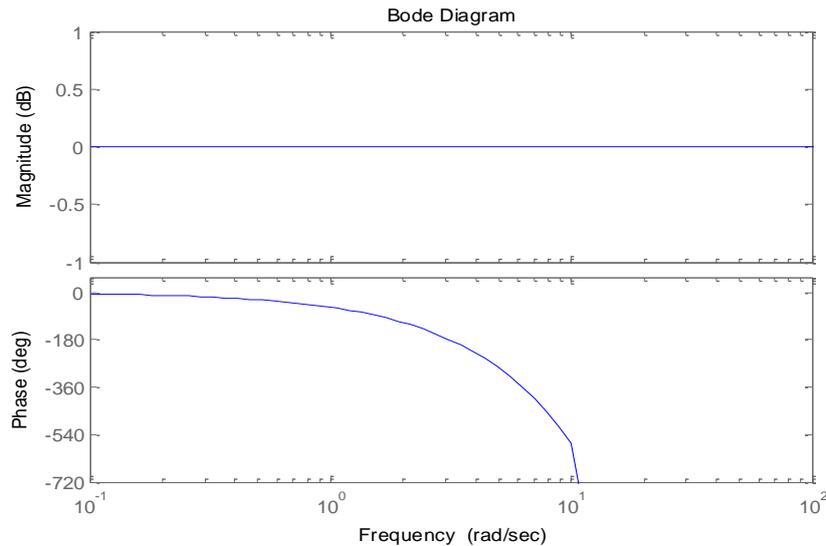


Por el contrario para sistemas sobreamortiguados la curva de la magnitud se “achata” y la del ángulo de fase tiende a desdoblarse en dos sigmoideas (cuanto más diferentes sean los  $\tau$  se nota más).



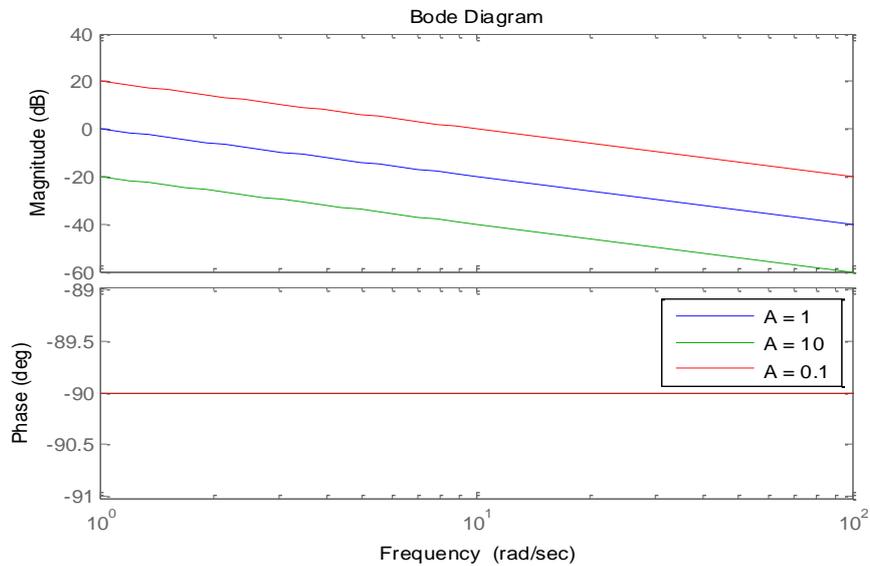
Otras funciones tienen también diagramas de Bode característicos. Por ejemplo el diagrama de Bode de la función retraso es horizontal para la amplitud y para el ángulo de fase tiende a menos infinito al aumentar la frecuencia. Por ejemplo, si

$$G(s) = e^{-\theta s} \quad \theta = 1$$



La función integradora

$$G(s) = \frac{1}{As}$$



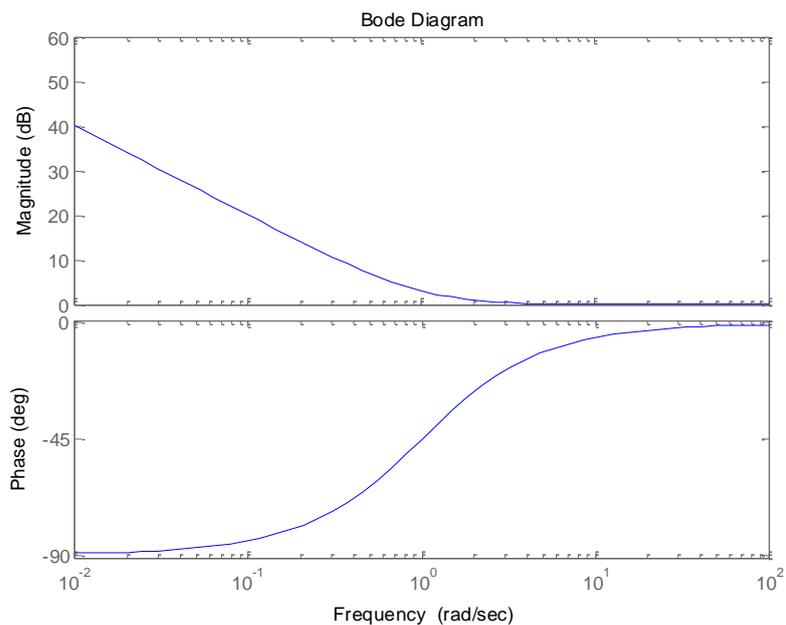
Un controlador PI

$$G(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} \right)$$

Resultan las siguientes expresiones

$$A = K_c \sqrt{\frac{1}{\omega^2 \tau_i^2} + 1} \quad \phi = \arctan\left(-\frac{1}{\omega \tau_i}\right)$$

Y el siguiente diagrama

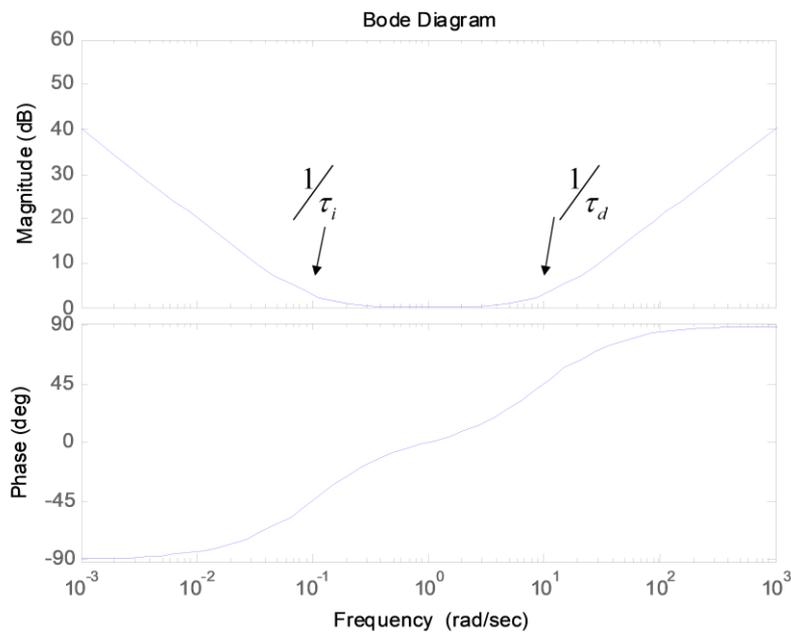


Un controlador PID

$$G(s) = K_c \left( 1 + \frac{1}{\tau_i s} + \tau_d s \right)$$

$$A = K_c \sqrt{\left( \omega \tau_D - \frac{1}{\omega \tau_I} \right)^2 + 1} \quad \phi = \arctan \left( \omega \tau_D - \frac{1}{\omega \tau_I} \right)$$

Y por ejemplo con los siguientes valores



$$\begin{aligned} K_c &= 1 \\ \tau_i &= 10 \\ \tau_d &= 0.1 \end{aligned}$$

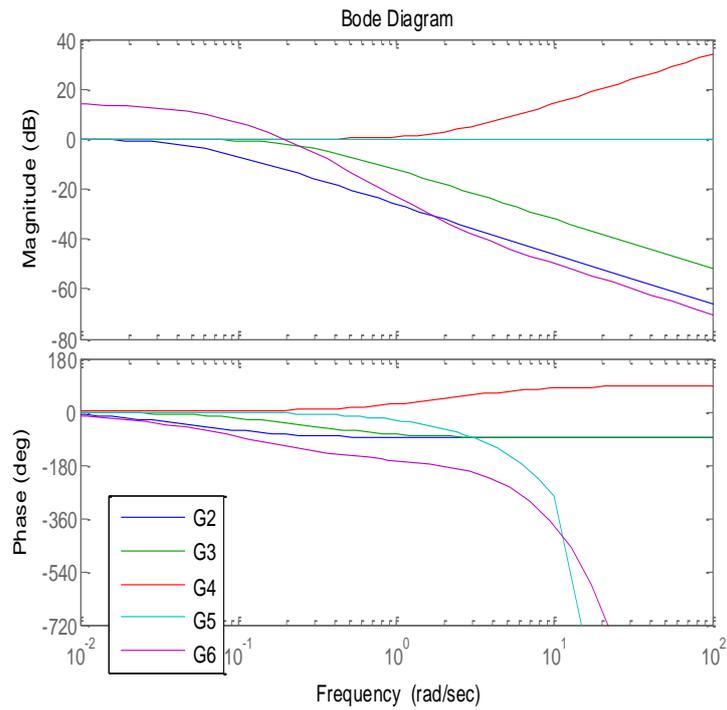
Funciones más complejas como por ejemplo

$$G(s) = \frac{5(0.5s + 1)e^{-0.5s}}{(20s + 1)(4s + 1)}$$

Se pueden descomponer en el producto de funciones más simples:

$$\begin{aligned} G_1 &= 5 \\ G_2 &= \frac{1}{20s + 1} \\ G_3 &= \frac{1}{4s + 1} \\ G_4 &= 0.5s + 1 \\ G_5 &= e^{-0.5s} \\ G_6 &= G_1 G_2 G_3 G_4 G_5 \end{aligned}$$

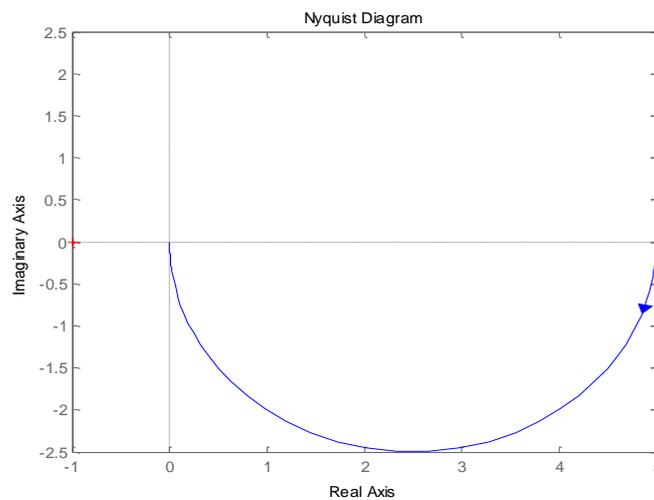
Y el diagrama resultante es la suma de las curvas de cada una de las funciones:



Otro tipo de diagramas para representar la misma información son los diagramas de Nyquist, donde  $G(j\omega)$  se representa en forma polar. La función en Octave es *nyquist(sl)*.

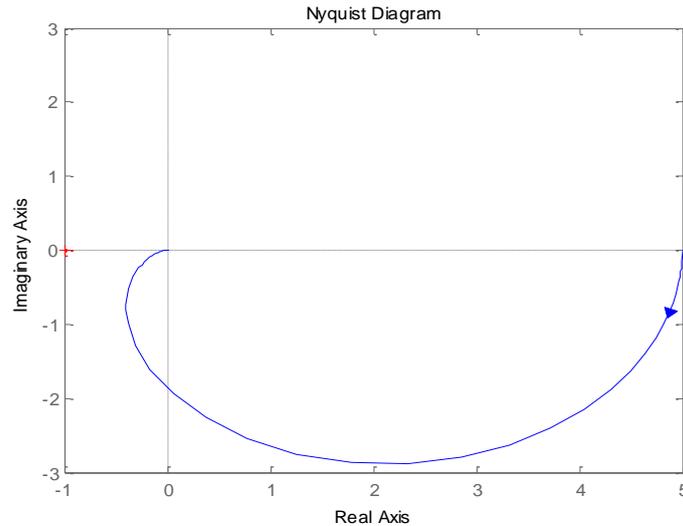
Por ejemplo para

$$G(s) = \frac{5}{2s + 1}$$

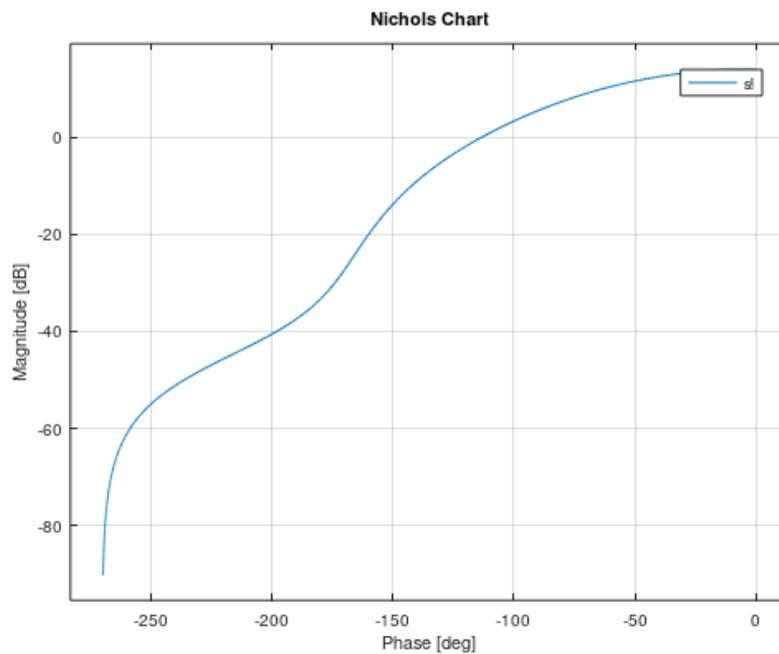


Por ejemplo para la función anterior

$$G(s) = \frac{5(0.5s + 1)e^{-0.5s}}{(20s + 1)(4s + 1)}$$



Otra forma de representación son los gráficos de Nichols donde se representa la amplitud contra el ángulo de desfase. La función en Octave es `nichols(sl)`. Por ejemplo, para la función anterior:

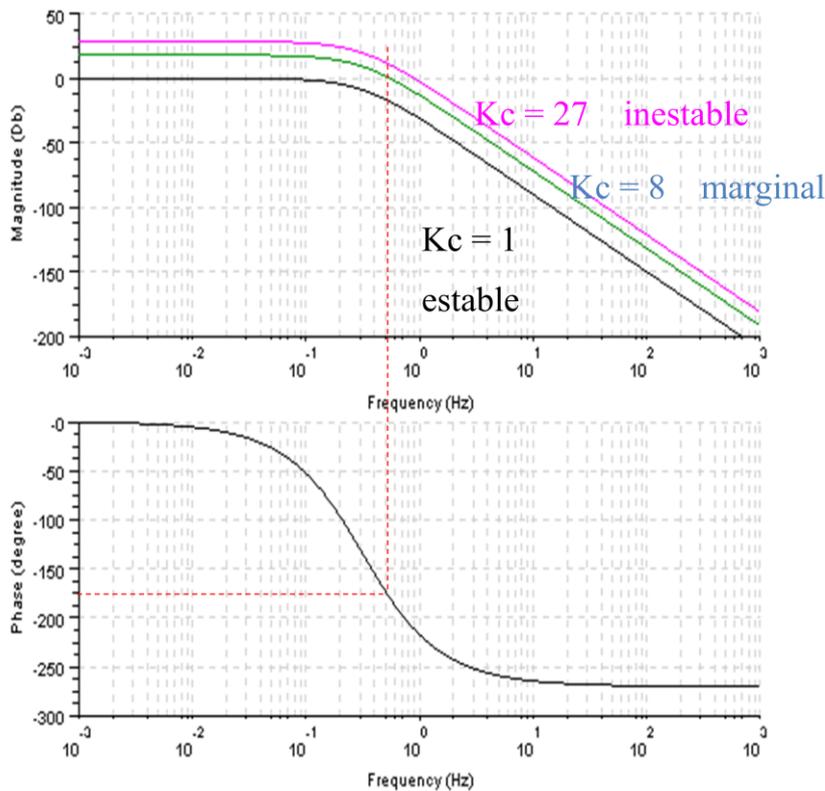


### Criterios de estabilidad gráfica

Una de las principales ventajas del análisis en el dominio de la frecuencia es que se puede visualizar gráficamente si el sistema es estable o no. Recordemos que para un bucle de control la ecuación característica era  $1 + G_{OL} = 0$

O bien  $G_{OL} = -1$  que corresponde a una función de transferencia con amplitud +1 y ángulo de fase  $-180^\circ$ . La frecuencia a la que se da esa condición se denomina frecuencia

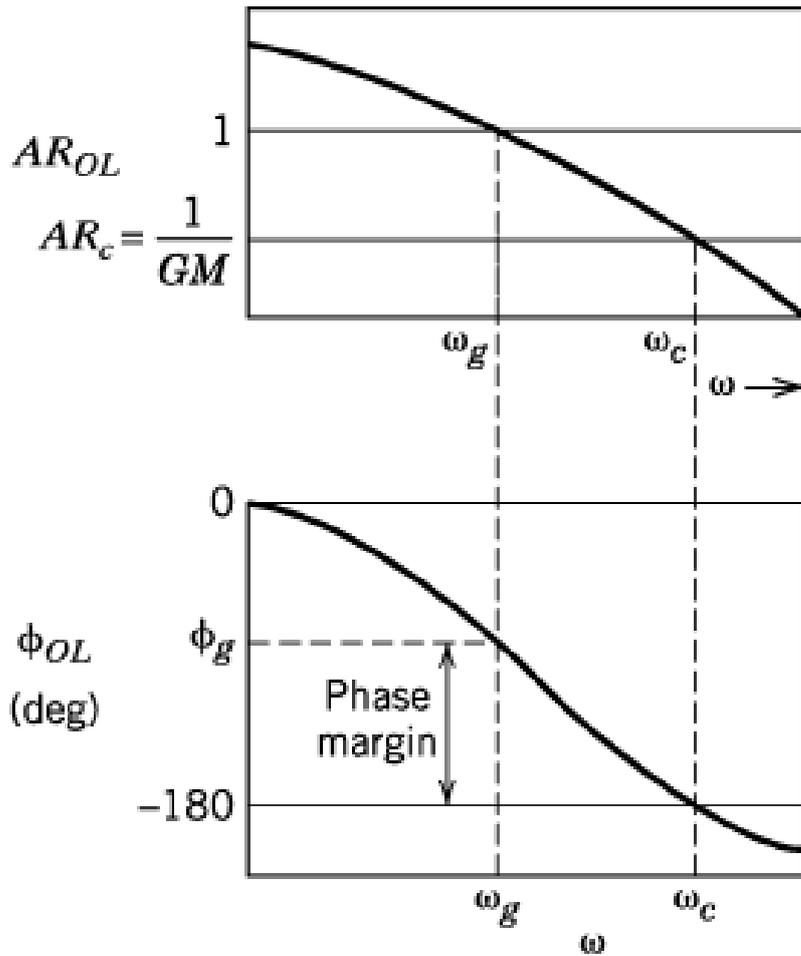
crítica  $\omega_c$ . Entonces si en la gráfica de Bode de  $G_{OL}$  la amplitud es mayor a 1 para un ángulo de fase de  $-180^\circ$  el sistema en bucle cerrado es estable.



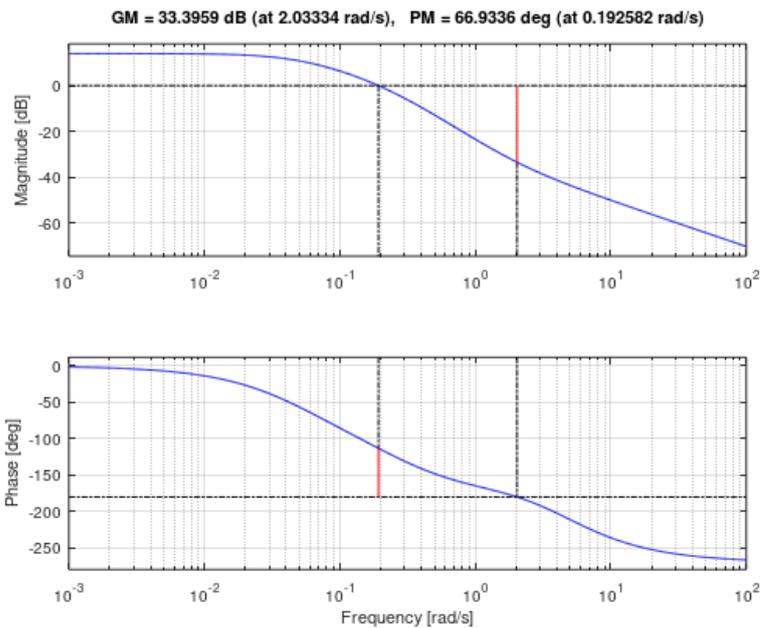
$$G_{OL} = \frac{8K_c}{(s+2)^3}$$

Relacionados con este criterio de estabilidad de los gráficos de Bode están los conceptos de margen de ganancia (“gain margin”) y margen de fase (“phase margin”). El gain margin es el inverso de la amplitud relativa correspondiente a la frecuencia crítica. La idea es que podemos aumentar hasta ese valor la ganancia del controlador sin que el sistema se desestabilice. Cuanto mayor sea ese margen más “cómodos” estaremos en cuanto a la estabilidad del sistema.

Si llamamos  $\omega_g$  a frecuencia correspondiente al punto de amplitud relativa 1 y  $\phi_g$  el ángulo de fase correspondiente, entonces el phase margin será  $\phi_g + 180^\circ$ . También es una medida de la estabilidad relativa e indica hasta cuanto delay podría soportar el bucle sin desestabilizarse.



En Octave existe un comando *margin* que nos devuelve estos conceptos. Por ejemplo, para la función anterior, escribiendo `margin(sl)` nos devuelve la forma gráfica:



Y escribiendo

```
>> [GAMMA, PHI, W_GAMMA, W_PHI]= margin(sl)
GAMMA = 46.751
PHI = 66.934
W_GAMMA = 2.0333
W_PHI = 0.19258
```

El valor GAMMA corresponde a la “ganancia última” que se utilizaba para sintonizar según Ziegler-Nichols y el valor W\_GAMMA es la frecuencia correspondiente al “período último”.

Como regla general, un controlador bien sintonizado debería tener un gain margin de entre 1.7 y 4.0 y un phase margin de entre 30° y 45°.

Otros criterios de estabilidad gráfica están basados en los gráficos de Nyquist. Consideremos la ecuación característica

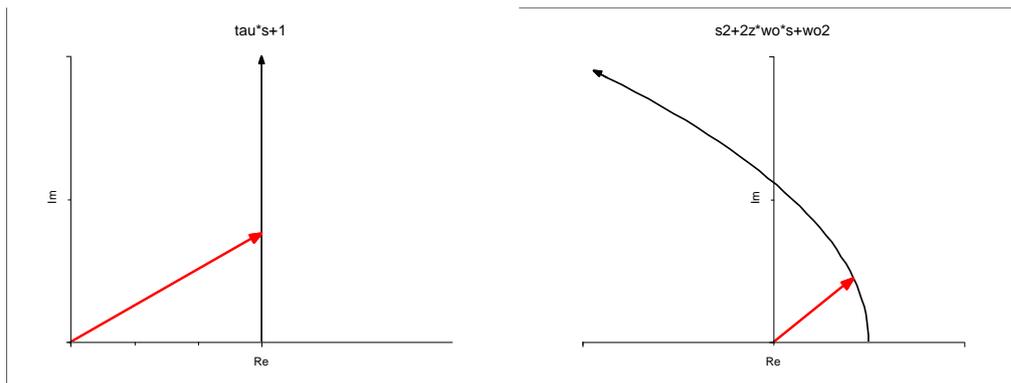
$$\Gamma(s) = s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \dots + a_0 = (s + \mu_1)(s + \mu_2)\dots(s + \mu_n)$$

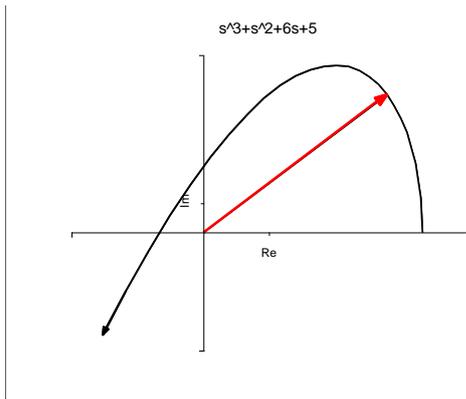
Puede graficarse en el plano complejo

$$|\Gamma(j\omega)| = |j\omega + \mu_1| |j\omega + \mu_2| \dots |j\omega + \mu_n| = \sqrt{\omega^2 + \mu_1^2} \times \sqrt{\omega^2 + \mu_2^2} \times \dots \times \sqrt{\omega^2 + \mu_n^2}$$

$$\begin{aligned} \angle\Gamma(j\omega) &= \angle(j\omega + \mu_1) + \angle(j\omega + \mu_2) + \dots + \angle(j\omega + \mu_n) = \arctan \frac{\omega}{\mu_1} + \arctan \frac{\omega}{\mu_2} + \dots + \arctan \frac{\omega}{\mu_n} \\ &= \theta_1 + \theta_2 + \dots + \theta_n \end{aligned}$$

Ejemplos de curvas:





En el caso de un bucle de control, la función de transferencia para el bucle cerrado será

$$G(s) = \frac{N(s)}{1 + G_{OL}(s)}$$

Expresemos

$$G_{OL}(s) = \frac{\Lambda(s)}{\Gamma(s)}$$

Y entonces

$$G = \frac{N}{1 + \Lambda/\Gamma} = \frac{N \Gamma}{\Gamma + \Lambda} = \frac{N \Gamma}{\Gamma_n}$$

Si el bucle abierto es estable entonces  $\Gamma$  pasa por  $n$  cuadrantes. Pero si también el bucle cerrado es estable entonces  $\Gamma_n$  también pasa por  $n$  cuadrantes. O sea que los cuadrantes netos que recorre  $G$  cuando  $\omega$  va de 0 a infinito es cero. O sea, la curva no encierra al origen.

Como la gráfica de  $G_{OL}$  en el plano complejo es la misma que la de  $G$  pero corrida hacia la izquierda una unidad, entonces se puede establecer el denominado Criterio de Nyquist: nos fijamos en el número de veces que la curva  $G_{OL}$  encierra el punto  $(-1, 0)$  del plano complejo, moviéndose en sentido horario y le restamos el número de polos de  $G_{OL}$  que están en el semiplano de la derecha. El resultado es el número de raíces inestables del bucle cerrado.