Fundamentos de Programación Entera
8. Generación de columnas

Carlos Testuri – Fernando Islas

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2012-2023

Contenido

Formulación con intersección de regiones factibles

Una alternativa para resolver los problemas es descomponerlos según conjuntos de variables (columnas).
Dado el problema *IP* max $\{c^\tau x : x \in X\}$, su región factible puede describirse como intersección de regiones, $X = \cap_{k=0}^{K} X^k$.

Un caso particular es

$$\begin{array}{lll} \max & \sum_{k=1}^{K} (c^k)^\tau x^k & \\ \text{s.a} & \sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b & (1) \\ & D^k x^k \leq e^k, \quad k = 1, ..., K & (2) \\ & x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k}, \quad k = 1, ..., K. & \end{array}$$

donde los conjuntos $X^k = \{x^k \in \mathbb{Z}_+^{n_k} : D^k x^k \leq e^k\}$ son independientes, y solo las restricciones (1) (conjunto X^0) vinculan las variables.

Formulación con intersección de regiones factibles

Donde se tiene la formulación definida en términos de las regiones independientes

$$
\begin{array}{ll}
\max & \sum_{k=1}^{K} (c^k)^\tau x^k \\
\text{s.a} & \sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b \\
 & x^k \in X^k, \quad k = 1, ..., K.
\end{array}
$$

Se transforma el problema en uno equivalente, en el que se representan directamente los puntos de la regiones factibles, X^k, y su selección a partir de nuevas variables.

El problema equivalente, denominado *problema maestro*, tiene una gran cantidad de variables.

Reformulación Dantzig-Wolfe

Dado el problema *IP* se asume que cada región factible X^k es finita y puede describirse a partir de sus puntos factibles, x^{ks}, $s = 1, ..., S_k$, con $k = 1, ..., K$.

Lo que permite reformular la descripción de $X^k = \{x^k \in \mathbb{R}^{n_k} : x^k = \sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} x^{ks},\ \sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} = 1,\ \lambda_{ks} \in \{0,1\},\ s = 1, ..., S_k\}$.

Sustituyendo la nueva descripción de x^k en la formulación original se tiene el problema maestro

$$
(IPM) \qquad \begin{array}{ll}
\max & \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S_k} (c^k x^{ks}) \lambda_{ks} \\
\text{s.a} & \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S_k} (A^k x^{ks}) \lambda_{ks} = b \\
 & \sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} = 1, \quad k = 1, ..., K \\
 & \lambda_{ks} \in \{0,1\},\ s = 1, ..., S_k,\ k = 1, ..., K.
\end{array}
$$

Relajación a programación lineal del problema maestro

La idea es resolver la relajación a programación lineal del problema *IPM*.

Se tiene el problema maestro relajado

$$
(LPM) \qquad
\begin{array}{rll}
z^{LPM} = & \max & \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S_k} (c^k x^{ks}) \lambda_{ks} \\
& \text{s.a} & \sum_{k=1}^{K} \sum_{s=1}^{S_k} (A^k x^{ks}) \lambda_{ks} = b \qquad (1) \\
& & \sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} = 1, \quad k = 1, ..., K \quad (2) \\
& & \lambda_{ks} \geq 0,\ s = 1, ..., S_k,\ k = 1, ..., K.
\end{array}
$$

Para el que se definen las variables duales asociadas a las restricciones de enlace, (1), como $\pi_i, i = 1, ..., m$, y las variables duales asociadas a las restricciones de las regiones, (2), como $\mu_k, k = 1, ..., K$.

Resolución del problema maestro relajado a lineal

En el proceso de resolución y debido a la gran cantidad de variables, no se las considera simultáneamente a todas las que están fuera de la base para determinar cual es la mejor para entrar a la base (condición de optimalidad en método simplex: $c_N^\tau - c_B^\tau B^{-1} N \leq 0$, para maximización), por escasez de recursos y porque la mayoría de las variables nunca entran en la base.

Por lo que se necesita un método para determinar algunas variables que estando fuera de la base son candidatas a mejorar el objetivo, sin tener que hacerlo para todas las variables.

Este método se logra resolviendo un problema auxiliar que no indaga todos los costos reducidos y que en su función objetivo determina una cota de los valores de costos reducidos; con lo que además, permite establecer la condición de optimalidad general.

Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 1/4

Algoritmo

1. Inicialización

Se disponible un conjunto inicial de variables con al menos un punto en representación de cada región k, con lo que se define y resuelve el problema restringido

$$(RLPM) \qquad \begin{array}{rll} \tilde{z}^{LPM} = & \max & \tilde{c}\tilde{\lambda} \\ & \text{s.a} & \tilde{A}\tilde{\lambda} = \tilde{b} \\ & & \tilde{\lambda} \geq 0. \end{array}$$

Su resolución da solución primal óptima $\tilde{\lambda}^*$ y solución dual óptima $(\pi^*, \mu^*) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^K$.

Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 2/4

Algoritmo

1. Inicialización (Cont)

Donde $\tilde{\lambda}$ y $\tilde{c}$ son subvectores de

$$\begin{array}{ccccccc} (\lambda_{11} & \dots & \lambda_{1S_1} & \cdots & \lambda_{K1} & \dots & \lambda_{KS_K}) \\ (c^1x^{11} & \dots & c^1x^{1S_1} & \dots & c^Kx^{K1} & \dots & c^Kx^{KS_K}) \end{array}$$

respectivamente, y donde $\tilde{A}$ es una submatriz de y $\tilde{b}$ es

$$\begin{pmatrix} A^1x^{11} & \dots & A^1x^{1S_1} & \cdots & A^Kx^{K1} & \dots & A^Kx^{KS_K} \\ 1 & \dots & 1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} b \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 3/4

Algoritmo (cont.)

2. Factibilidad primal

Toda solución factible de *RLPM* es factible para *LPM*. En particular $\tilde{\lambda}^*$ es solución factible para *LPM*.

Además, $\tilde{z}^{LPM} = \tilde{c}\tilde{\lambda}^* = \sum_{i=1}^{m} \pi_i^* b_i + \sum_{k=1}^{K} \mu_k^* \leq z^{LPM}$.

3. Optimalidad

Se verifica si (π^*, μ^*) es dual factible para *LPM*. Para cada variable, es decir $x \in X^k$ con $k = 1, ..., K$, se debe cumplir que los costos reducidos son $c^k x - \pi^* A^k x - \mu_k^* \leq 0$.

En lugar de indagar todas las variables, se resuelve (para X^k) el subproblema

$$\gamma_k = \max\{(c^k - \pi^* A^k)x - \mu_k^* : x \in X^k\}.$$

Algoritmo de resolución del problema maestro relajado 4/4

Algoritmo (cont.)

4. Criterio de parada

Si $\gamma_k = 0$ para $k = 1, ..., K$, entonces la solución (π^*, μ^*) es dual factible para LPM, y se cumple que $z^{LPM} \leq \sum_{i=1}^{m} \pi_i^* b_i + \sum_{k=1}^{K} \mu_k^*$. Como el valor objetivo de la solución primal factible $\tilde{\lambda}^*$ iguala al de su cota superior, entonces $\tilde{\lambda}^*$ es óptima para LPM.

5. Generación de nueva columna (ingreso de nueva variable)

Si $\gamma_k > 0$ para algún k, entonces la variable correspondiente a la solución óptima del subprolema, $\tilde{x}^{k*}$, se agrega al problema $RLPM$.

6. Resolución

Se resuelve el nuevo problema $RLPM$, que solo difiere en una variable con el anterior. Se continúa en el paso 2.

Fortaleza del problema maestro relajado

El problema maestro relajado se obtuvo del problema maestro al sustituir x^k por $\sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} x^{ks}$, donde $\sum_{s=1}^{S_k} \lambda_{ks} = 1,\ \lambda_{ks} \geq 0,\ s = 1, ..., S_k$.
Lo que es equivalente a sustituir $x^k \in X^k$ por $x^k \in \text{conv}(X^k)$, por lo que se tiene que

Proposición (1)

$$
\begin{array}{rll}
z^{LPM} = & \max & \sum_{k=1}^{K} (c^k)^\tau x^k \\
 & s.a & \sum_{k=1}^{K} A^k x^k = b \\
 & & x^k \in conv(X^k),\ k = 1, ..., K.
\end{array}
$$

Resolución mediante planos de corte y relajación Lagrangeana

El problema *IP* original también puede resolverse mediante planos de corte, generando inecuaciones válidas para cada región X^k.

Alternativamente, también puede resolverse mediante relajación Lagrangeana, relajando las restricciones de enlace y resolviendo el problema dual $z^{LD} = \min_u L(u)$ donde

$$L(u) = \begin{array}{ll} \max & \sum_{k=1}^{K} (c^k)^\tau x^k + u^\tau (b - \sum_{k=1}^{K} A^k x^k) \\ \text{s.a} & x^k \in X^k,\ k = 1, ..., K, \end{array}$$

el cual es separable en subproblemas según regiones

$$L(u) = u^\tau b + \sum_{k=1}^{K} \left(\begin{array}{ll} \max & (c^k - u^\tau A^k)^\tau x^k \\ \text{s.a} & x^k \in X^k \end{array} \right).$$

Comparación con resolución con planos de corte y relajación Lagrangeana

Sea z^{LD} el valor óptimo del problema dual Lagrangeano con relajación de las restricciones de enlace.
Sea z^{Corte} el valor óptimo cuando se incorporan inecuaciones válidas a la relajación a programación lineal del problema *IP* original de forma de obtener $\text{conv}(X^k)$ para cada k.

Proposición (2)

Las cotas duales obtenidas por generación de columnas, relajación Lagrangeana y planos de corte coinciden, $z^{LPM} = z^{LD} = z^{Corte}$.

La complejidad de los problemas de optimización y separación de $\text{conv}(X^k)$ es la misma, por lo que la elección entre ellos depende de su dificultad relativa y la convergencia de los métodos.