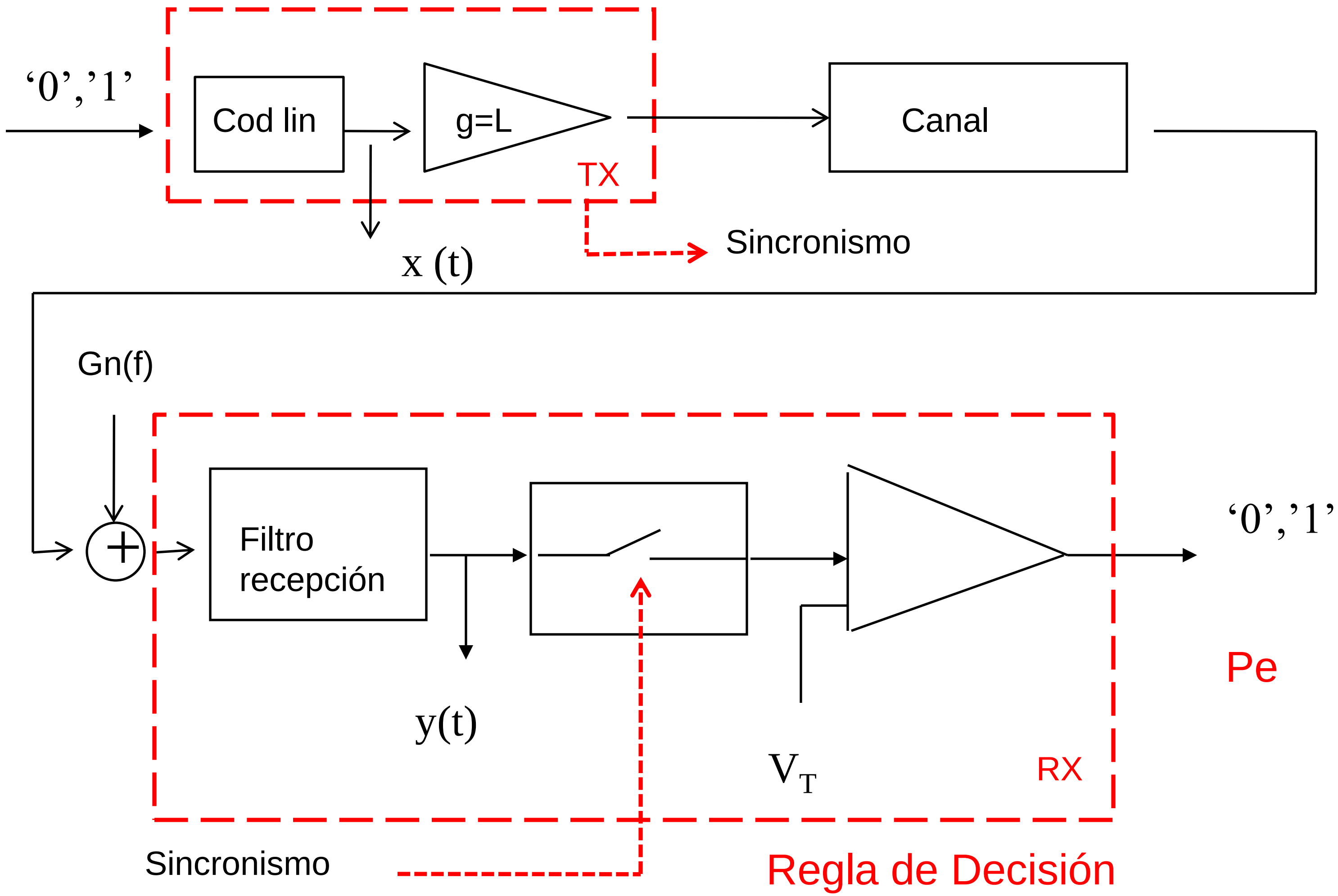
Sistemas de Comunicación

Clase 16: Sistemas de Comunicación Digitales Banda Base- Ruidos y Errores

Objetivo

- Diagrama de bloques de un Sistema de Comunicación Digital Banda Base (TX-RX)
- Análisis del desempeño en presencia de ruido
- Cálculo de la Pe
- Determinación parámetros que minimizan Pe
- Resultados para ruido gaussiano

Diagrama de bloques SCDBB



Sistemas de Comunicación Digital

$$x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, p_k(t-kT-\mathrm{t}_0) \quad \text{con } t_0 : U[0,T]$$

$$y(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \hat{a}_k\, \hat{p}_k(t-kT-\mathrm{t}_d-\mathrm{t}_0) \quad \text{con } t_d : \text{retardo canal}$$

Sup : TX y RX en sincronismo perfecto, muestreo instante ideal

detección simbolo enviado en $t=mT+t_0$, muestreo en $t_m=mT+t_d+t_0$

Sup : no ISI (interferencia intersimbólica) : $\hat{p}_k(nT)=0 \quad \text{para } n\neq 0$

$$y(t_m)=\hat{a}_m+\sum_{k\neq m} \hat{a}_k\, \hat{p}_k(mT-kT)+n(t_m)$$

$$\boxed{y(t_m)=\hat{a}_m+n(t_m)}$$

Muestreo instante ideal, no ISI

Análisis bajo supuestos:

- Código binario (después se generalizará M-ario)
- Canal no distorsiona ni introduce ISI
- Muestreo en el instante ideal
- Agrega ruido aditivo con media nula
- Filtro recepción limita ruido y no introduce ISI

Notación

En trasmisión :

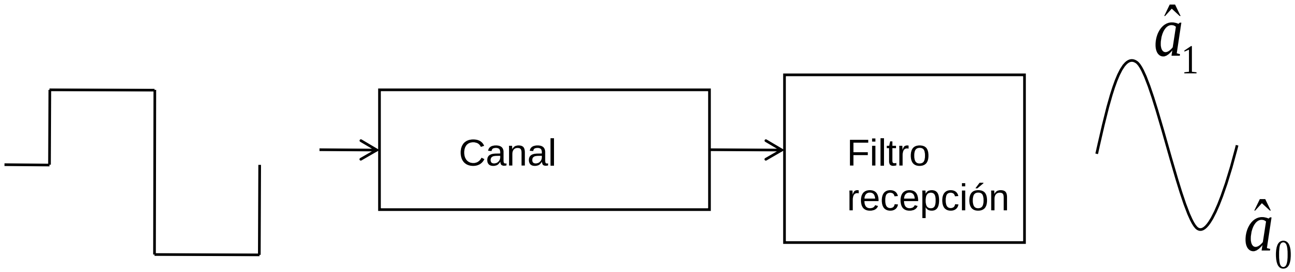
$$x(t) = \begin{cases} a_1 p_1(t) & \text{'1'} \quad \mathrm{kT} \le \mathrm{t} < (\mathrm{k}+1)\mathrm{T} \\ a_0 p_0(t) & \text{'0'} \quad \mathrm{kT} \le \mathrm{t} < (\mathrm{k}+1)\mathrm{T} \end{cases}$$

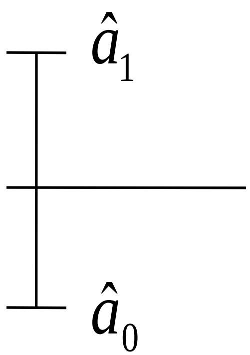
En recepción :

$$y(t_k) = \left. \begin{cases} \hat{a}_1 \hat{p}_1(0) + \mathrm{n}(t_k) = \hat{a}_1 + \mathrm{n}(t_k) \\ \hat{a}_0 \hat{p}_0(0) + \mathrm{n}(t_k) = \hat{a}_0 + \mathrm{n}(t_k) \end{cases} \right\} = \hat{a}_k + \mathrm{n}(t_k)$$

$\hat{a}_1(\hat{a}_0)$: valor recibido (muestreado ideal, no ISI) en ausencia de ruido, cuando se trasmite un '1' ('0').

Ejemplo:





Valor recibido en ausencia de ruido cuando el trasmisor envía un 1

V_T

¿Qué criterio utilizaría para determinar la regla de decisión?

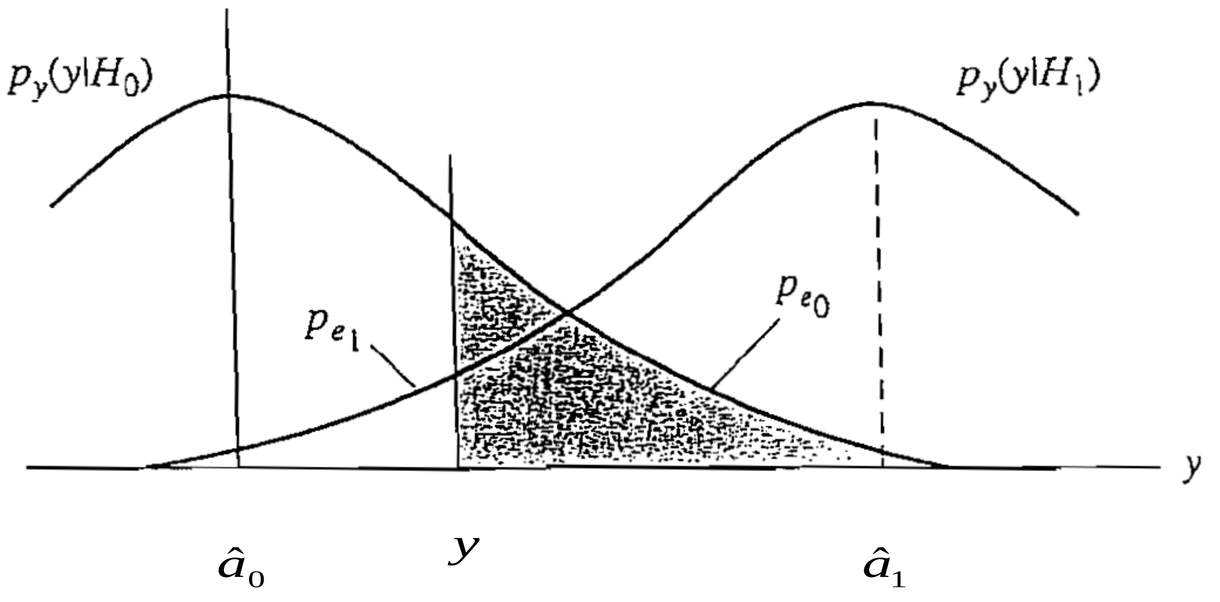
Modelado de señal recibida

En presencia de ruido los valores recibidos $y(t_k)$ dependen del símbolo enviado y del ruido superpuesto.

$Y = y(t_k)$: variable aleatoria cuya pdf depende del ruido y del símbolo enviado (densidad paramétrica)

$$p_Y(y) = \begin{cases} p_Y(y/H_0) = p_N(y - \hat{a}_0) & \mathrm{H}_0 \\ p_Y(y/H_1) = p_N(y - \hat{a}_1) & \mathrm{H}_1 \end{cases}$$

Ejemplo: Ruido gaussiano media nula



Recibo y, necesito regla de decisión para inferir si el trasmisor envió un ‘0’ o un ‘1’.

Regla de decisión de Bayes (óptima)

$P(H_j / y)$: probabilidad a posteriori se puede determinar si se conocen las prioris P_j y las densidades condicionales $p(y / H_j)$

$$P(H_j / y) = \frac{p(y / H_j) P_j}{p(y)}$$

Recibido y ¿Cuál es la regla de decisión razonable?

Regla de decisión de Bayes: elegir la hipótesis que maximiza la probabilidad a posteriori.

Si $P(H_0 / y) > P(H_1 / y)$ decido H_0, en otro caso H_1

Regla de decisión de Bayes- Pe mínimo

$$P(error/y) = \begin{cases} P(H_0/y) & \text{si decido } H_1 \\ P(H_1/y) & \text{si decido } H_0 \end{cases}$$

$$P(error) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(error, y)dy = \int_{-\infty}^{+\infty} P(error/y)p(y)dy$$

Va ser mínima si para todo y elijo la regla de decisión óptima (que minimice el error de decisión).

$$\text{Decido}: \begin{cases} H_1 : P(H_0/y) < P(H_1/y) \\ H_0 : P(H_1/y) < P(H_0/y) \end{cases}$$

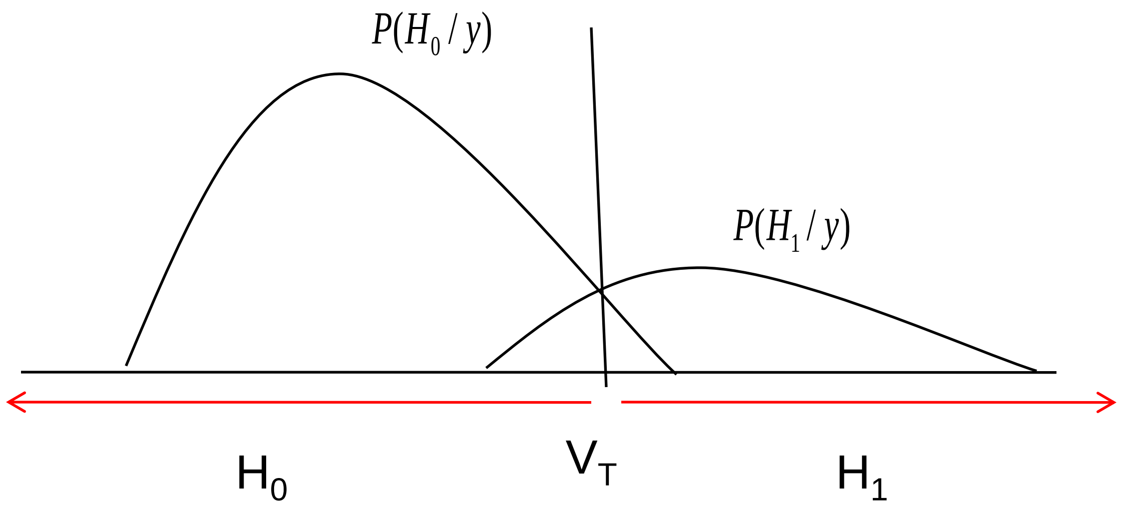
$$\boxed{\text{Regla de Decisión}: P(H_0/y) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} P(H_1/y)}$$

Regla de decisión de Bayes

Se puede expresar en función de las prioris y las verosimilitudes:

Regla de Decisión: $$P_0\, p(y/H_0) \underset{H_1}{\overset{H_0}{\gtrless}} P_1\, p(y/H_1)$$

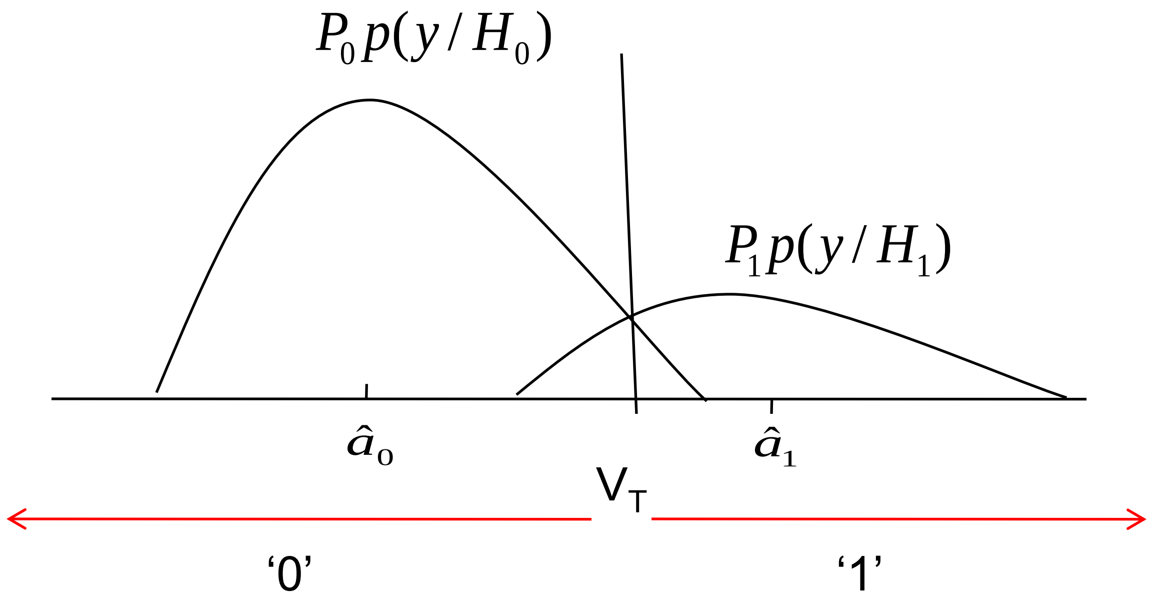
Umbral óptimo



Si las densidades son unimodales, existe un umbral óptimo V_T

$$\text{Regla de Decisión}: \begin{cases} H_0 \ \text{si } y < V_T & \left[P(H_0/y) \overset{H_0}{>} P(H_1/y)\right] \\ H_1 \ \text{si } y > V_T & \left[P(H_1/y) \underset{H_1}{>} P(H_0/y)\right] \end{cases}$$

Umbral óptimo

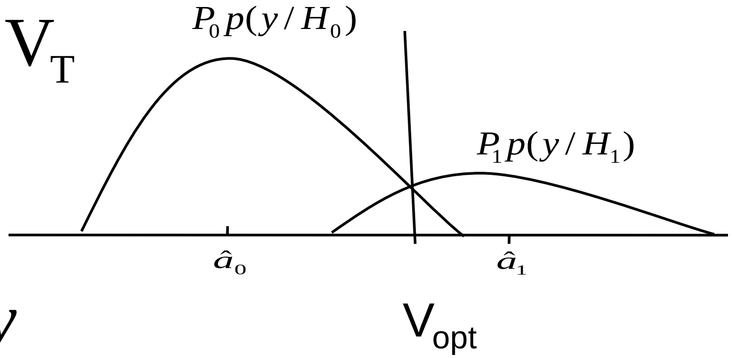


Determino V_T : $P(H_0/V_T) = P(H_1/V_T)$ ó tal que:

$P_0 p(V_T/H_0) = P_1 p(V_T/H_1)$ en función de las prioris y verosimilitudes.

Elección umbral – que minimiza Pe

$P_e = P_0 P_{e0} + P_1 P_{e1}$ función del umbral V_T



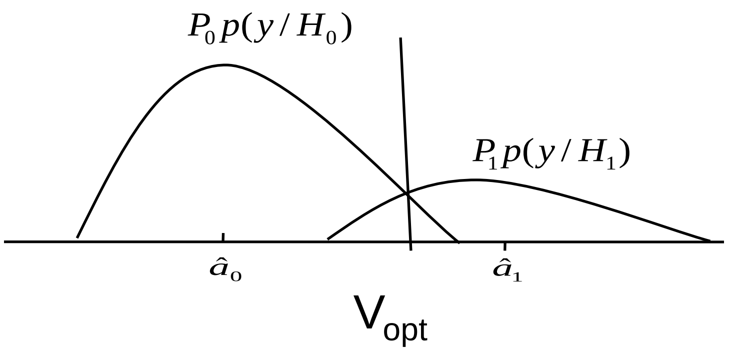
V_{opt} el que minimiza P_e.

$$P_{e0} = P(y > V_T / H_0) = \int_{V_T}^{+\infty} p_y(y/H_0)dy$$

$$P_{e1} = P(y < V_T / H_1) = \int_{-\infty}^{V_T} p_y(y/H_1)dy = 1 - \int_{V_T}^{+\infty} p_y(y/H_1)dy$$

$$P_e = P_0 \int_{V_T}^{+\infty} p_y(y/H_0)dy + P_1\left(1 - \int_{V_T}^{+\infty} p_y(y/H_1)dy\right)$$

Elección umbral – que minimiza Pe $p(y/H_1)$

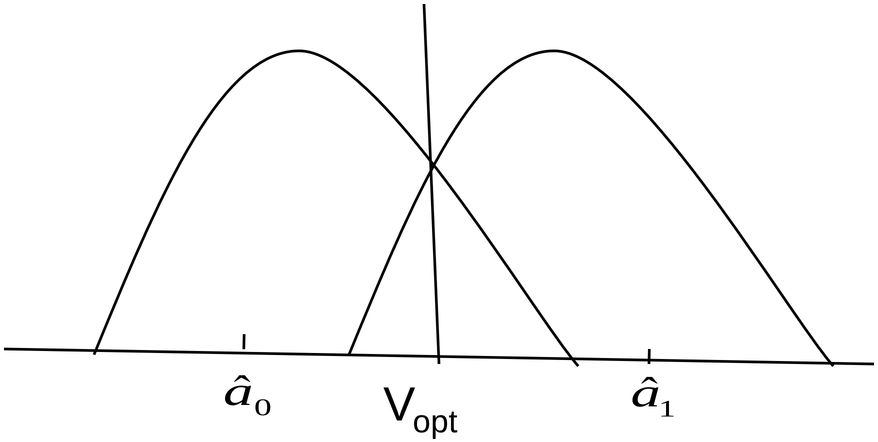


$$P_e = P_0 \int_{V_T}^{+\infty} p_y(y/H_0)dy + P_1\left(1 - \int_{V_T}^{+\infty} p_y(y/H_1)dy\right)$$

$$\frac{\partial P_e}{\partial V_T} = 0 = -P_0 p_y(V_T/H_0) + P_1 p_y(V_T/H_1)$$

$$V_{opt} \longrightarrow \boxed{P_0 p_y(V_{opt}/H_0) = P_1 p_y(V_{opt}/H_1)}$$

Elección umbral – Discusión

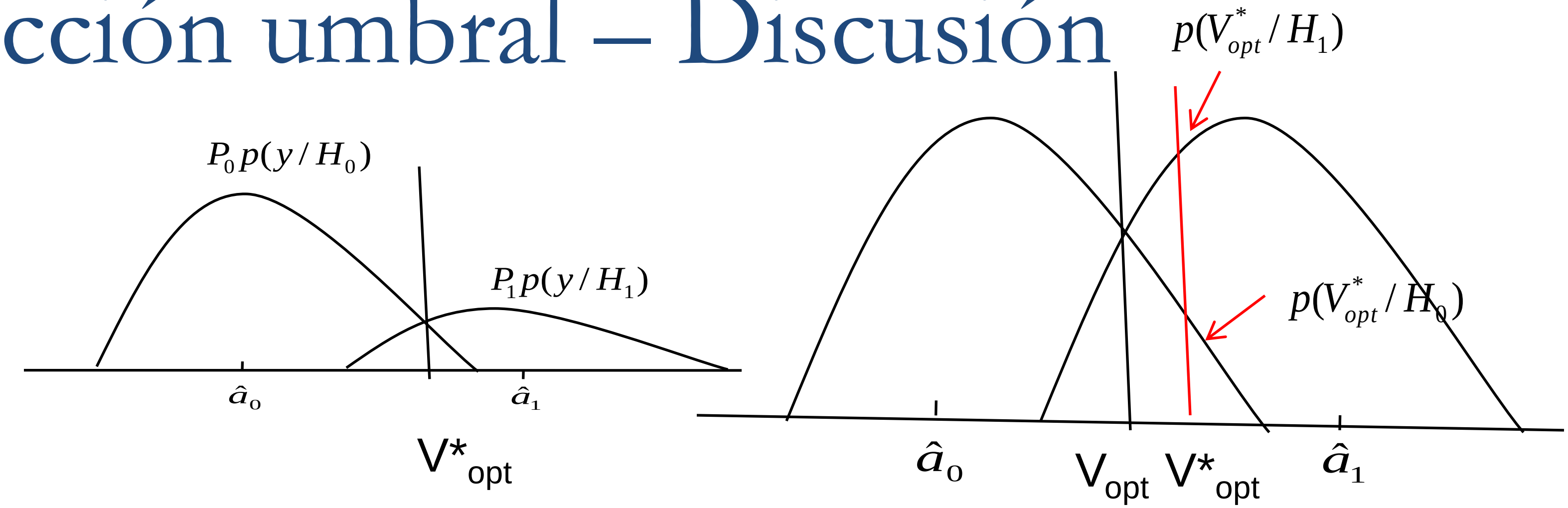


$$P_0 = P_1 \qquad p_Y\left(V_T / H_0\right) = p_Y\left(V_T / H_1\right)$$

si las densidades son unimodales y simétricas

$$V_{opt} = \frac{\hat{a}_0 + \hat{a}_1}{2} \quad \text{con } P_0 = P_1$$

Elección umbral – Discusión



¿Hacia donde se corre si $P_0 > P_1$?

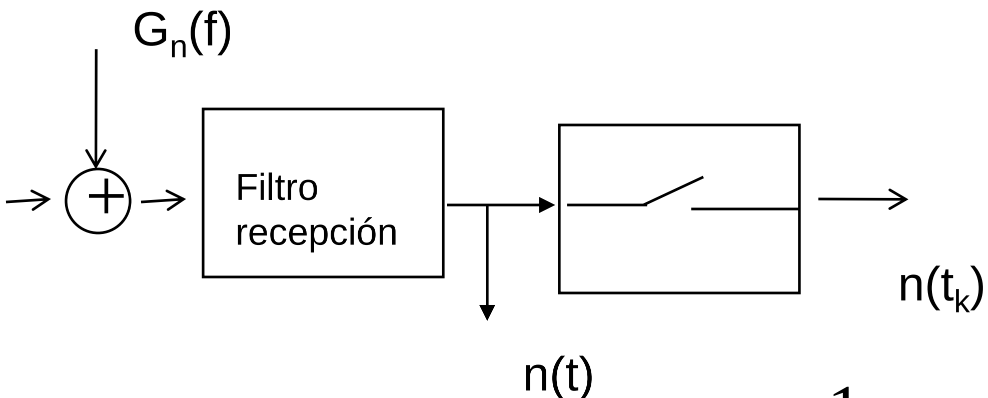
$$V^*_{opt} : P\left(H_0 / V^*_{opt}\right) = P\left(H_1 / V^*_{opt}\right)$$

$$P_0 p\left(V^*_{opt} / H_0\right) = P_1 p\left(V^*_{opt} / H_1\right)$$

Se corre hacia donde $p\left(V / H_0\right)$ decrece, hacia los 1.

Prefiere equivocarse más en los menos probables, siempre que los costos de equivocación sean iguales.

Resultados para ruido gaussiano



$$\text{ruido gaussiano } \mathrm{N}(0,\sigma_N): p_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-n^2/2\sigma_N^2}$$

$$\sigma_N^2 = N_R$$

$$P_e = P_0 \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-(y-\hat{a}_0)^2/2\sigma_N^2} dy + P_1 \left(1 - \int_{V_T}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_N} e^{-(y-\hat{a}_1)^2/2\sigma_N^2} dy \right)$$

Resultado para ruido gaussiano

$$\frac{\partial P_e}{\partial V_T} = 0 \qquad V_{opt} = \frac{\hat{a}_0 + \hat{a}_1}{2} + \frac{\sigma_N^2}{\hat{a}_1 - \hat{a}_0} L_n\left(\frac{P_0}{P_1}\right)$$

$$Si \quad P_0 = P_1 \quad V_{opt} = \frac{\hat{a}_0 + \hat{a}_1}{2}$$

$$P_e = P_1 Q\left(\frac{\hat{a}_1 - V_T}{\sigma_N}\right) + P_0 Q\left(\frac{V_T - \hat{a}_0}{\sigma_N}\right) = Q\left(\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_0}{2\sigma_N}\right)$$

$$\text{con } Q(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_k^{+\infty} e^{-\frac{\lambda^2}{2}} d\lambda$$

Resultado para ruido gaussiano

$$P_e = Q\left(\frac{\hat{a}_1 - \hat{a}_0}{2\sigma_N}\right)$$

Resultado válido:

- Simbolos equiprobables
- Umbral óptimo
- Ruido gaussiano
- No ISI
- Sincronismo entre el TX y el RX

Probabilidad de error depende de la separación entre los símbolos y la cantidad de ruido en recepción.