8 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA PARA SISTEMAS DE ÓRDENES MAYORES

Sistemas de segundo orden

Un sistema de segundo orden está definido por una EDO de segundo orden. Consideremos una EDO de segundo orden con coeficientes constantes de la siguiente forma:

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b\, u(t)$$

También se puede escribir esa misma ecuación de esta forma:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = k\, u(t)$$

donde

$$\tau^2 = \frac{a_2}{a_0} \qquad 2\zeta\tau = \frac{a_1}{a_0} \qquad k = \frac{b}{a_0}$$

y se llaman k: ganancia (unidades de salida/entrada)
ζ: factor de amortiguamiento (“dumping”, adimensional)
τ: período natural (unidades de tiempo)

Si tomamos transformadas de Laplace

$$\tau^2\left[s^2 Y(s) - sy(0) - \dot{y}(0)\right] + 2\zeta\tau\left[sY(s) - y(0)\right] + Y(s) = kU(s)$$

Y asumimos que las condiciones iniciales son nulas (lo cual es generalmente cierto pues trabajamos con variables desviación)

$$Y(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1} U(s)$$

O sea que la función de transferencia de un sistema de segundo orden es:

$$g(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Las raíces del denominador de la función de transferencia se llaman *polos*, y tienen una importancia fundamental en el comportamiento del sistema

$$p_i = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

A saber:

Factor de dumping ζ	**polos**	**comportamiento**
> 1	2 reales distintos	Sobreamortiguado
= 1	2 reales iguales	Críticamente amortiguado
< 1	2 complejo conjugados	Subamortiguado

Respuesta a un escalón para sistemas de segundo orden

El comportamiento va a ser distinto según el valor del factor de amortiguamiento:

Sistema sobreamortiguado (ζ > 1, polos reales y distintos) – El denominador se puede factorear de la siguiente manera:

$$\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1 = (\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)$$

Y por lo tanto los polos son

$$p_1 = -\frac{1}{\tau_1} = -\frac{\zeta}{\tau} + \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} \qquad p_2 = -\frac{1}{\tau_2} = -\frac{\zeta}{\tau} - \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau}$$

O bien

$$\tau_1 = \frac{\tau}{\zeta - \sqrt{\zeta^2 - 1}} \qquad \tau_2 = \frac{\tau}{\zeta + \sqrt{\zeta^2 - 1}}$$

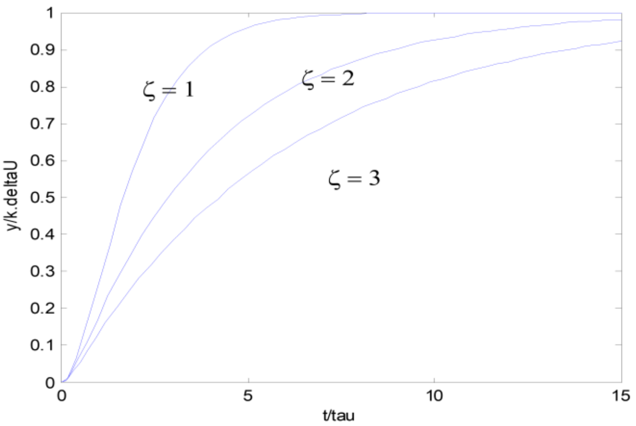
O bien

$$\tau^2 = \tau_1 \tau_2 \qquad \zeta = \frac{\tau_1 + \tau_2}{2\sqrt{\tau_1 \tau_2}}$$

Como se ve, se puede pasar de una expresión a otra fácilmente.

La respuesta a un escalón de altura ΔU estará dada por

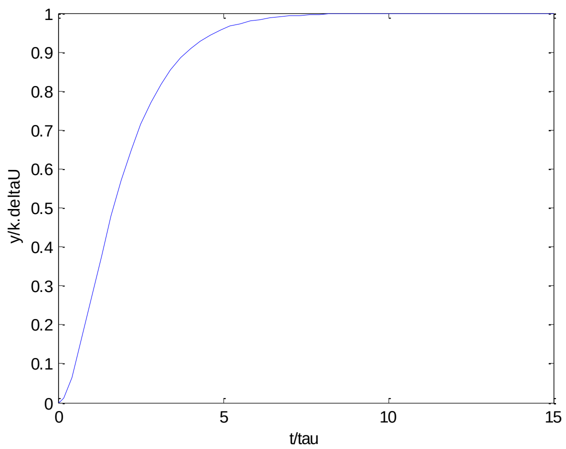
$$y(t) = k\Delta U\left[1 + \frac{\tau_1 e^{-t/\tau_1} - \tau_2 e^{-t/\tau_2}}{\tau_2 - \tau_1}\right]$$



A mayor factor de dumping la respuesta es más “lenta”.

Sistema críticamente amortiguado (ζ = 1, polos repetidos) – Es el caso límite del anterior. Para una entrada en escalón de altura ΔU la respuesta es

$$y(t) = k\Delta U\left[1 + \left(1 + \frac{t}{\tau}\right)e^{-t/\tau}\right]$$



Sistema subamortiguado (ζ < 1, polos complejo conjugados) –

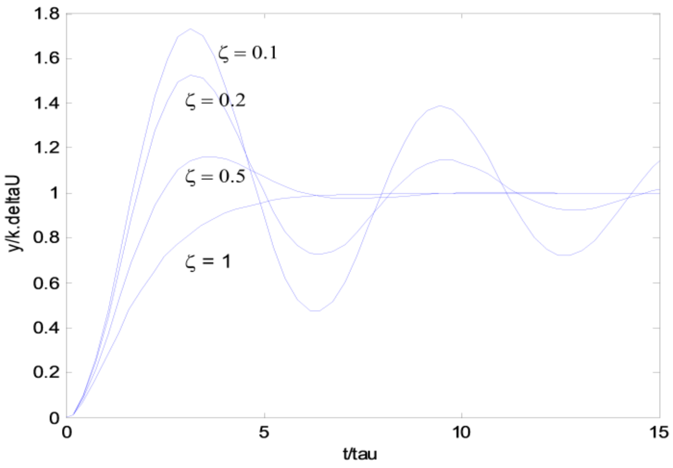
$$p = -\frac{1}{\tau_1} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm \frac{\sqrt{\zeta^2 - 1}}{\tau} = -\frac{\zeta}{\tau} \pm j\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau}$$

En este caso, para una entrada en escalón la respuesta es oscilante, y la oscilación será mayor cuanto menor sea el factor de dumping.

$$y(t) = k\Delta U\left[1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\left(\zeta\, t/\tau\right)}\sin(\beta t + \phi)\right]$$

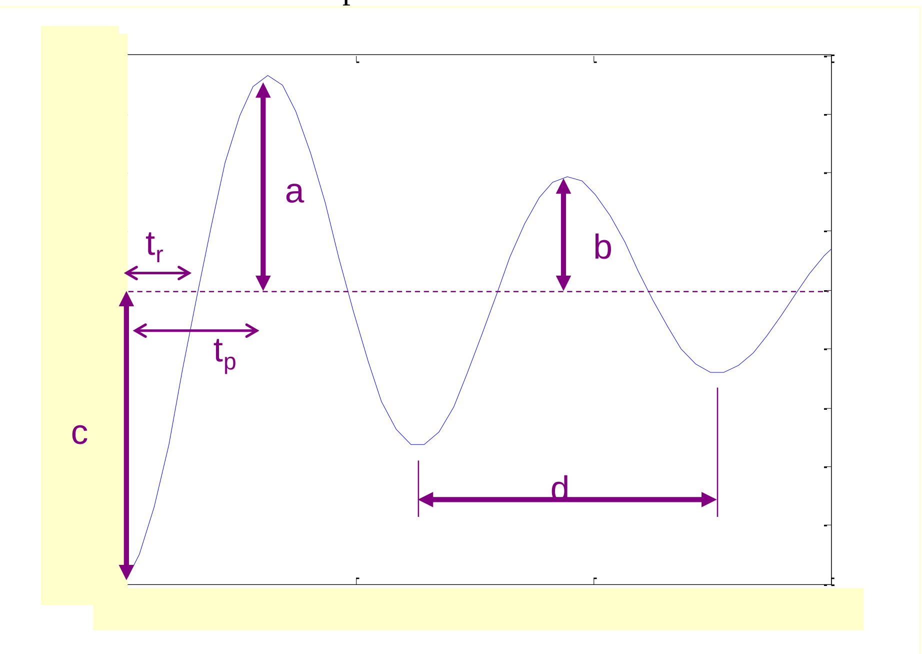
Donde

$$\beta = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\tau} \qquad \phi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$$



Ver 'ejem.8.1'.

Se suelen definir ciertas relaciones para caracterizar la oscilación:



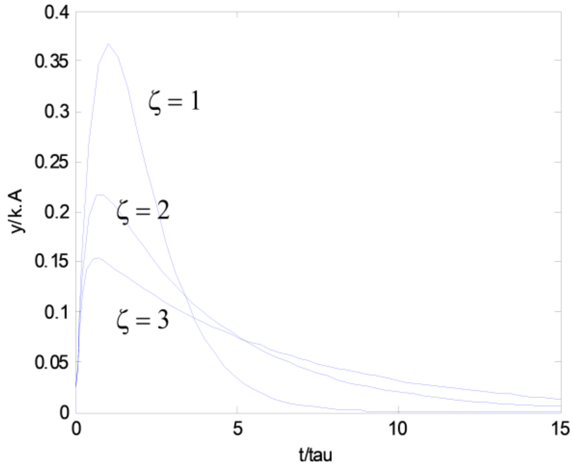
Relación de decaimiento (Decay ratio): b/a
Overshoot ratio: a/c
Período de oscilación: d
Rise time: tiempo que demora en alcanzar el estado estacionario por primera vez (t_r)
Tiempo hasta alcanzar el primer pico (t_p)

Respuesta a un pulso de sistemas de segundo orden

Al igual que antes el tipo de respuesta variará según el valor del factor de dumping, o lo que es igual según los polos.

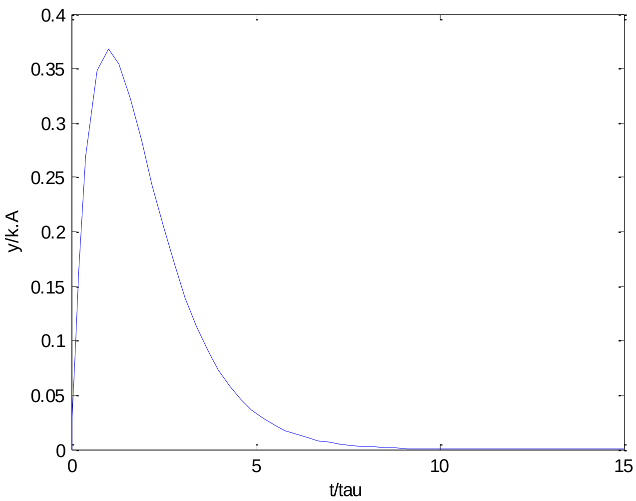
Sistema sobreamortiguado (polos reales distintos) –

$$y(t) = kA\left[\frac{1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 1}}e^{-\zeta\, t/\tau}\,\sinh\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau}\right)\right]$$



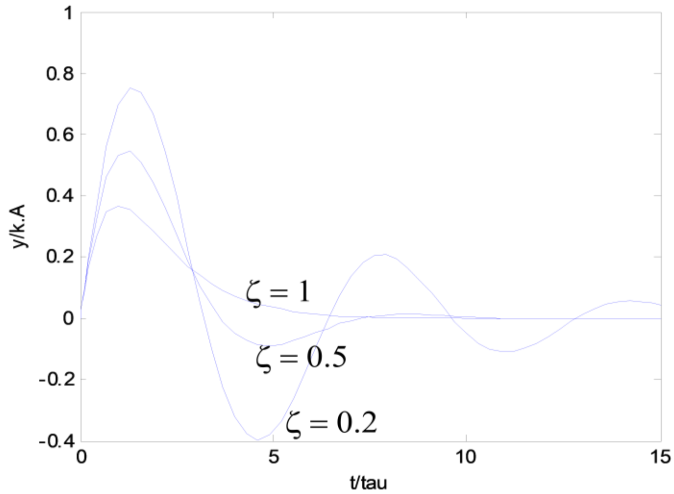
Sistema críticamente amortiguado (polos repetidos) –

$$y(t) = kA\left[\frac{t}{\tau^2}e^{-t/\tau}\right]$$



Sistema subamortiguado (polos complejos) –

$$y(t) = kA\left[\frac{1}{\tau}\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}}e^{-\zeta\, t/\tau}\,\sin\left(\sqrt{1-\zeta^2}\,\frac{t}{\tau}\right)\right]$$



Respuesta a una sinusoide de sistemas de segundo orden

Si la entrada varía sinusoidalmente en el tiempo $u(t) = A\sin\omega t$

En el dominio de Laplace $U(s) = \dfrac{A\omega}{s^2+\omega^2}$

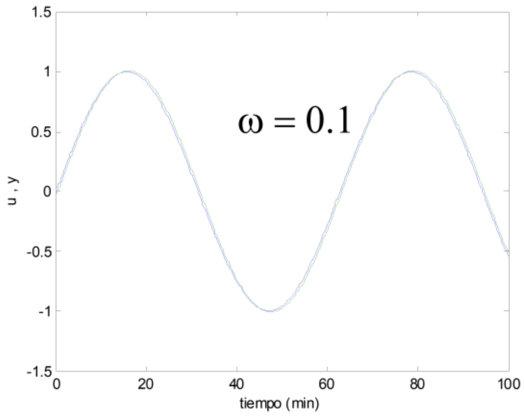
Y la respuesta de un sistema de segundo orden será

$$y(t) = \frac{kA}{\sqrt{\left(1-\tau^2\omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\tau\omega\right)^2}}\sin(\omega\, t + \phi)$$

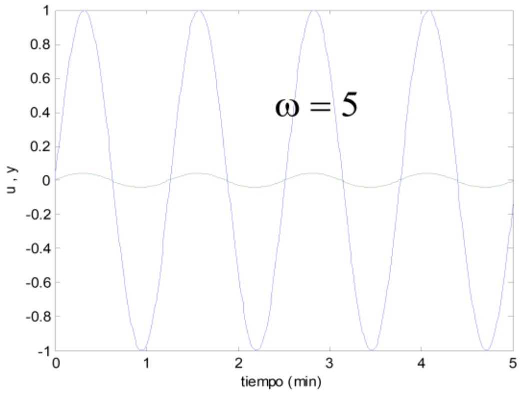
con el ángulo de desfasaje $\phi = \tan^{-1}\left(\dfrac{-2\zeta\tau\omega}{1-\tau^2\omega^2}\right)$

y la relación de amplitud $\dfrac{k}{\sqrt{\left(1-\tau^2\omega^2\right)^2 + \left(2\zeta\tau\omega\right)^2}}$

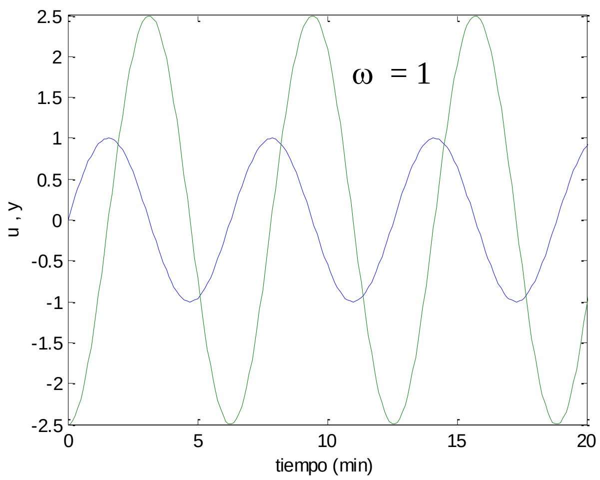
La respuesta dependerá también de la frecuencia ω. Por ejemplo, si $g(s) = \dfrac{1}{s^2+0.2*s+1}$ la salida (y) es casi coincidente con la entrada (u)



Por el contrario, si ω = 5 , hay una gran diferencia de amplitud, la salida es un orden de magnitud más pequeña que la entrada. (Ver 'ejem8.2').



Para otros valores de ω la salida puede ser más grande que la entrada y también se puede producir un desfasaje entre ambas señales. Incluso se puede dar un fenómeno en el que los picos de una señal coinciden con el valor nulo de la otra ("resonance peaking").



Sistemas de segundo orden con dinámica en el numerador

Ciertos sistemas más complejos exhiben una "dinámica en el numerador": refiriéndonos a la expresión en el dominio de Laplace aparece un polinomio en s en el numerador (lo que está relacionado con la presencia de derivadas de la función de entrada en la ecuación diferencial):

$$Y(s) = \frac{k(\tau_n s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)} U(s)$$

Se llaman "ceros" (en inglés "zero") a las raíces del numerador. Por lo tanto la expresión en el formato "polos – ceros" es

$$Y(s) = \frac{k_{pz}(s - z_1)}{(s - p_1)(s - p_2)} U(s)$$

donde $k_{pz} = \frac{k\tau_n}{\tau_1 \tau_2}$ $\quad p_1 = -\frac{1}{\tau_1}$ $\quad p_2 = -\frac{1}{\tau_2}$

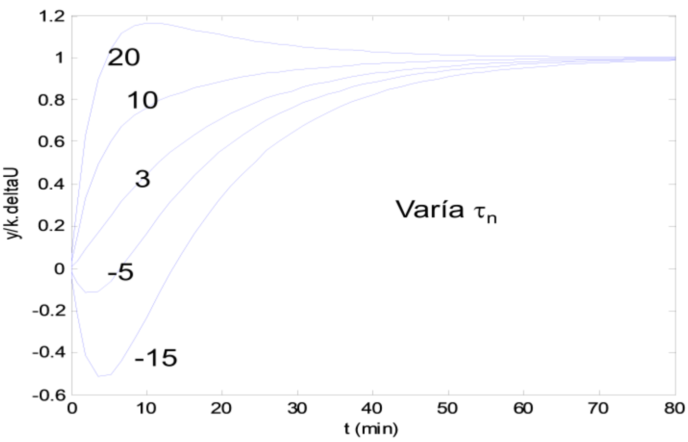
Para una entrada en escalón de altura ΔU la respuesta es

$$y(t) = k\Delta U\left[1 + \frac{\tau_n - \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-t/\tau_1} + \frac{\tau_n - \tau_2}{\tau_2 - \tau_1} e^{-t/\tau_2}\right]$$

Por ejemplo si tuviéramos la función

$$G(s) = \frac{k(\tau_n s + 1)}{(3s + 1)(15s + 1)}$$

Para distintos valores de τ_n tenemos respuestas completamente diferentes:



Obsérvese que en ciertos casos se produce un pico que sobrepasa el nuevo valor de estado estacionario. Por el contrario, para ciertos valores (valores de τ_n negativo, o "cero" positivo) ocurre lo que se llama "respuesta inversa", esto es, a un aumento en la entrada la señal de salida produce en primera instancia una disminución hasta alcanzar un mínimo y después comenzar a "subir" hasta llegar al nuevo estado estacionario. Véase 'ejem8.3'.

A veces, un sistema con dinámica en el numerador que presenta respuesta inversa es consecuencia de dos procesos en paralelo con distintas constantes de tiempo y que actúan en forma inversa (ganancias de distinto signo). Sea por ejemplo

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K_1}{\tau_1 s + 1} + \frac{K_2}{\tau_2 s + 1}$$

$$= \frac{K_1(\tau_2 s + 1) + K_2(\tau_1 s + 1)}{(\tau_2 s + 1)(\tau_1 s + 1)} = \frac{(K_1 + K_2)\left(\dfrac{K_1\tau_2 + K_2\tau_1}{K_1 + K_2} s + 1\right)}{(\tau_2 s + 1)(\tau_1 s + 1)}$$

Llamando $K = K_1 + K_2$

$$\tau_n = \frac{K_1\tau_2 + K_2\tau_1}{K_1 + K_2} = \frac{K_1\tau_2 + K_2\tau_1}{K}$$

queda $\dfrac{K(\tau_n s + 1)}{(\tau_1 s + 1)(\tau_2 s + 1)}$

La condición para que ocurra respuesta inversa es

$$\tau_n < 0$$

$$\frac{K_1\tau_2 + K_2\tau_1}{K} < 0$$

O bien $-\dfrac{K_2}{K_1} > \dfrac{\tau_2}{\tau_1}$

<u>Efecto de las localizaciones de polos y ceros en la respuesta a un escalón</u>

En general la función de transferencia de un proceso (con coeficientes constantes) puede escribirse según

$$G(s) = \frac{k(\tau_{n1} s + 1)(\tau_{n2} s + 1)\ldots(\tau_{nm} s + 1)}{(\tau_{d1} s + 1)(\tau_{d2} s + 1)\ldots(\tau_{dn} s + 1)}$$

O bien en forma polinomial

$$G(s) = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \ldots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0}$$

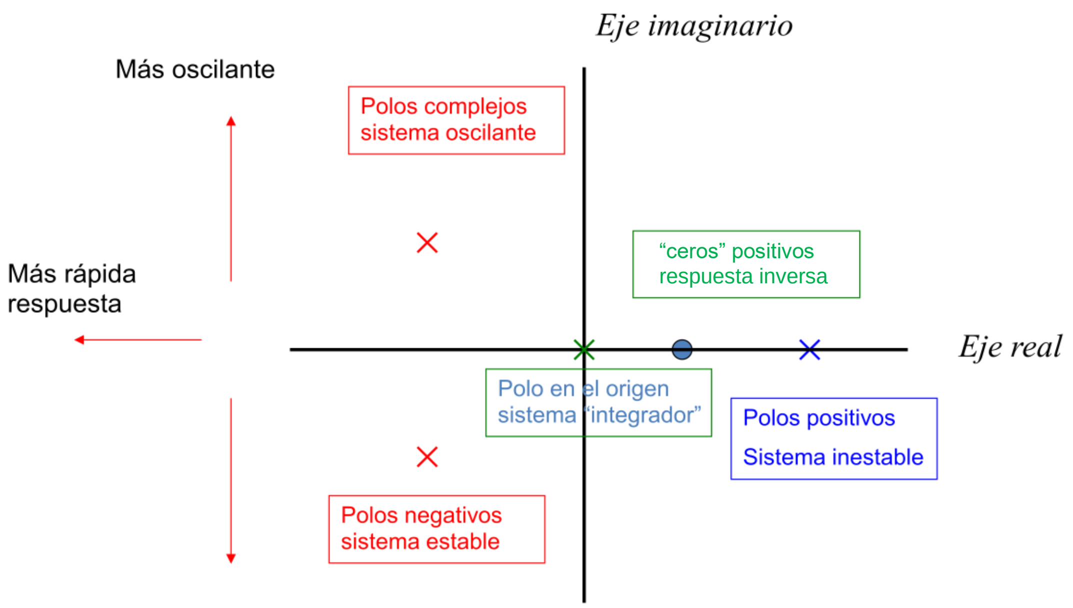
O bien en forma de polos y ceros

$$G(s) = \frac{k_{pz}(s - z_1)(s - z_2)\ldots(s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)\ldots(s - p_n)}$$

donde

$$k_{pz} = k\frac{\prod_{i=1}^{n}(-p_i)}{\prod_{i=1}^{m}(-z_i)} \qquad p_i = -\frac{1}{\tau_{di}} \qquad z_i = -\frac{1}{\tau_{ni}}$$

Si representamos las posiciones de polos y ceros en el plano imaginario tenemos el siguiente esquema general:



Aproximación de Padé para el tiempo muerto

La transformada de Laplace para el tiempo muerto es $e^{-\theta s}$, y se puede desarrollar en serie de potencias, a los efectos de tener expresiones exclusivamente polinómicas, que son más fáciles de manejar. Así, dependiendo de los términos de orden superior que despreciemos tendremos:

Aproximación de Padé de primer orden

$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s}{1 + \frac{\theta}{2}s}$$

Aproximación de Padé de segundo orden

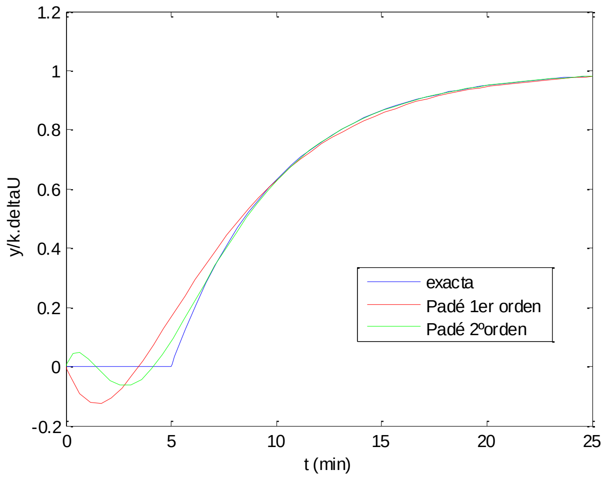
$$e^{-\theta s} \approx \frac{1 - \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2}{1 + \frac{\theta}{2}s + \frac{\theta^2}{12}s^2}$$

Por ejemplo, si la función de transferencia fuera $$G(s) = \frac{e^{-5s}}{5s+1}$$

La aproximación de primer orden sería $$G_1(s) = \frac{-2.5s+1}{12.5s^2+7.5s+1}$$

Y la de segundo orden $$G_2(s) = \frac{2.0833s^2-2.5s+1}{10.4167s^3+14.5833s^2+7.5s+1}$$

Y gráficamente



Obsérvese que la aproximación de primer orden produce en este caso respuesta inversa, y la de segundo orden primero "sube", luego "baja" y finalmente vuelve a "subir" para alcanzar el estado estacionario. Las diferencias más grandes con la solución exacta se dan en el período inicial que corresponde al retardo; luego las soluciones son prácticamente coincidentes.

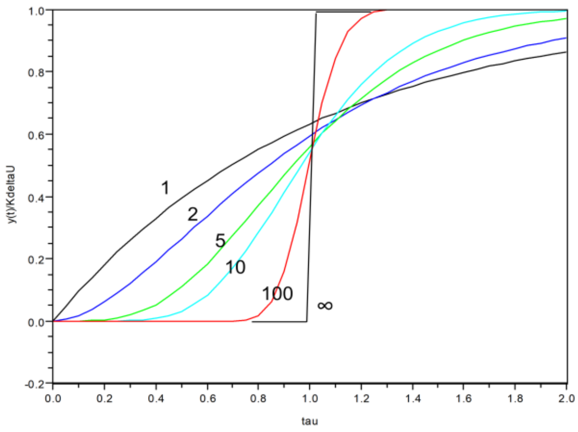
<u>Sistemas de órdenes mayores</u>

En algunos casos es posible hallar en forma bastante directa la función de transferencia de sistemas de órdenes mayores. Supongamos que tenemos un sistema de n etapas con igual constante de tiempo τ.

$$\mathrm{G_n}(s) = \frac{K}{\left(\frac{\tau}{n}s+1\right)^n}$$

La respuesta a una entrada en escalón será

$$y(t) = K\ \Delta U\left[1-e^{-nt/\tau}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\left(nt/\tau\right)^k}{k!}\right]$$



A mayor número de etapas la respuesta se aproxima más al escalón retardado en τ.

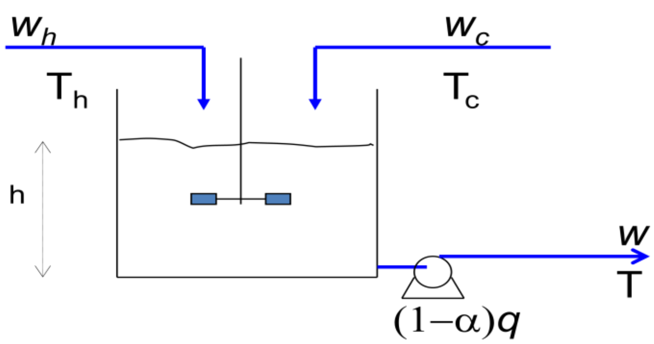
Otro caso frecuente se da en algunos casos de procesos en serie de primer orden (τ_1, τ_2, ..., τ_n), se da que la mayoría están "dominados" por uno o dos de ellos que tienen constantes de tiempo mayores. Los demás pueden "agruparse" en un "retraso aparente". En este caso se puede aproximar

$$G(s) \cong \frac{Ke^{-\theta s}}{(\tau_1 s+1)(\tau_2 s+1)}$$

$$\theta = \sum_{3}^{n} \tau_i$$

Procesos "Multiple Input – Multiple Output" (MIMO)

La mayoría de los sistemas complejos reciben la influencia de más de una variable de entrada así como tienen más de una variable de salida. En general la interrelación entre las variables hace del proceso un sistema complejo. Consideremos por ejemplo un mezclador de corrientes de líquido a distinta temperatura.



De los balances de masa y energía resultan

$$\rho C\frac{d\left[V\left(T-T_{ref}\right)\right]}{dt}=w_h C\left(T_h-T_{ref}\right)+w_c C\left(T_c-T_{ref}\right)-wC\left(T-T_{ref}\right)$$
$$\rho\frac{dV}{dt}=w_h+w_c-w$$

Considerando $\dfrac{d\left[V\left(T-T_{ref}\right)\right]}{dt}=\left(T-T_{ref}\right)\dfrac{dV}{dt}+V\dfrac{dT}{dt}$

y asumiendo el área transversal constante

$$\frac{dT}{dt}=\frac{1}{\rho Ah}\left[w_h T_h+w_c T_c-\left(w_h+w_c\right)T\right]$$
$$\frac{dh}{dt}=\frac{1}{\rho A}\left(w_h+w_c-w\right)$$

Después de linealizar esas ecuaciones, pasar a variables desviación y tomar transformadas de Laplace llegamos a *ocho* funciones de transferencia, que relacionan las cuatro variables de entrada con las dos de salida:

$$\frac{T'(s)}{W_h'(s)}=\frac{\left(T_{h,s}-T_s\right)/w_s}{\tau\ s+1}\qquad\qquad \frac{H'(s)}{W_h'(s)}=\frac{1/A\rho}{s}$$
$$\frac{T'(s)}{W_c'(s)}=\frac{\left(T_{c,s}-T_s\right)/w_s}{\tau\ s+1}\qquad\qquad \frac{H'(s)}{W_c'(s)}=\frac{1/A\rho}{s}$$
$$\frac{T'(s)}{T_h'(s)}=\frac{w_{h,s}/w_s}{\tau\ s+1}\qquad\qquad \frac{H'(s)}{T_h'(s)}=0$$
$$\frac{T'(s)}{T_c'(s)}=\frac{w_{c,s}/w_s}{\tau\ s+1}\qquad\qquad \frac{H'(s)}{T_c'(s)}=0$$

donde $\tau=\dfrac{\rho Ah_s}{w_s}$

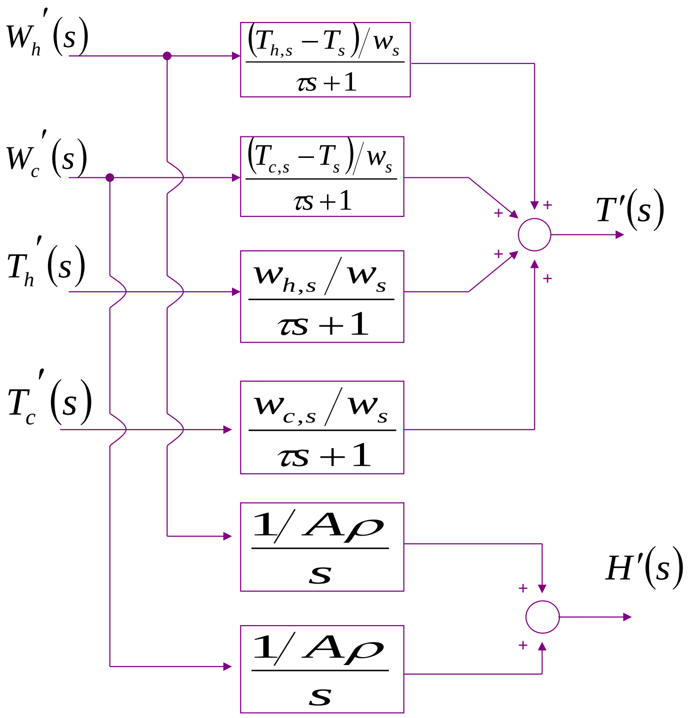
Como hay dos funciones de transferencia que son nulas, en realidad el sistema se puede simplificar a solo seis. El sistema se puede escribir en forma matricial.

$$\begin{bmatrix}T'(s)\\H'(s)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\left(T_{h,s}-T_s\right)/w_s}{\tau s+1} & \dfrac{\left(T_{c,s}-T_s\right)/w_s}{\tau s+1} & \dfrac{w_{h,s}/w_s}{\tau s+1} & \dfrac{w_{c,s}/w_s}{\tau s+1}\\ \dfrac{1/A\rho}{s} & \dfrac{1/A\rho}{s} & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}W_h'(s)\\W_c'(s)\\T_h'(s)\\T_c'(s)\end{bmatrix}$$

O bien

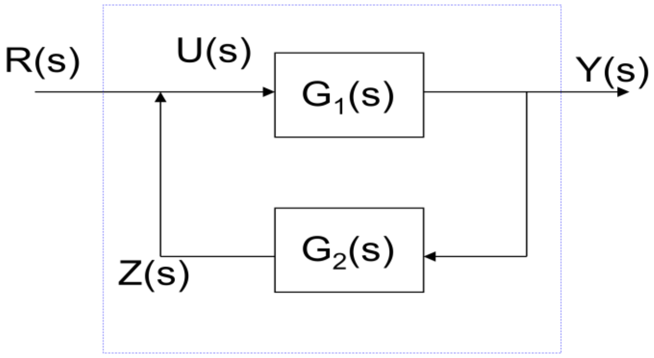
$$\begin{bmatrix} T'(s) \\ H'(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{(T_{h,s}-T_s)/w_s}{\tau s+1} & \dfrac{(T_{c,s}-T_s)/w_s}{\tau s+1} \\ \dfrac{1/A\rho}{s} & \dfrac{1/A\rho}{s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_h'(s) \\ W_c'(s) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dfrac{w_{h,s}/w_s}{\tau s+1} & \dfrac{w_{c,s}/w_s}{\tau s+1} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_h'(s) \\ T_c'(s) \end{bmatrix}$$

Que se puede representar en el siguiente diagrama de bloques:



Sistemas con recirculación

Otro tipo importante de sistemas que aparecen en los procesos industriales es el de aquellos en los que la señal de salida retroalimenta a la entrada (particularmente reconoceremos este caso en el clásico control feedback).



Como $Y(s) = G_1(s)U(s)$

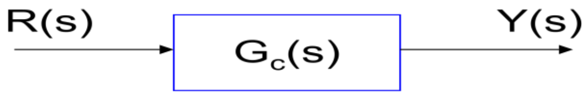
pero $U(s) = R(s) + Z(s)$

$Z(s) = G_2(s)Y(s)$

por tanto $Y(s) = G_1(s)\left[R(s) + G_2(s)Y(s)\right]$

reordenando $$Y(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)} R(s)$$

La porción del diagrama que aparece recuadrada puede concebirse como una única función de transferencia equivalente:



$$G_c(s) = \frac{G_1(s)}{1 - G_1(s)G_2(s)}$$

Este resultado es general, no depende de las cuáles sean las funciones de transferencia involucradas. La regla general para construir la función de transferencia para un sistema con retroalimentación es la siguiente: *en el numerador va el producto de todas las funciones que están entre la entrada y la salida; en el denominador, 1 menos el producto de todas las funciones que aparecen en el bucle de retroalimentación*.

<u>Conversión entre la formulación en el espacio de las variables de estado y la función de transferencia</u>

Un mismo sistema puede representarse en el dominio del tiempo expresado como ecuación diferencial o en el dominio de Laplace como función de transferencia. Por ejemplo, para un sistema de segundo orden las siguientes formulaciones son equivalentes:

$$\tau^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + 2\zeta\tau \frac{dy}{dt} + y = k\ u(t)$$

$$Y(s) = \frac{k}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau\ s + 1} U(s)$$

Se puede reordenar la primera ecuación de la siguiente manera

$$\frac{d^2 y}{dt^2} = -\frac{2\zeta}{\tau}\frac{dy}{dt} - \frac{1}{\tau^2} y + \frac{k}{\tau^2} u(t)$$

llamando $x_1 = y$

$x_2 = \dot{x}_1$

entonces $\ddot{y} = \ddot{x}_1 = \dot{x}_2$

y podemos reescribir como un sistema de dos ecuaciones diferenciales de primer orden:

$$\dot{x}_2 = -\frac{2\zeta}{\tau} x_2 - \frac{1}{\tau^2} x_1 + \frac{k}{\tau^2} u(t)$$

$$\dot{x}_1 = x_2$$

Que se puede escribir en forma matricial de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{\tau^2} & -\frac{2\zeta}{\tau} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{\tau^2} \end{bmatrix} [u]$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

O en forma general $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u}$

$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x}$

Donde $\mathbf{x}$ es el vector de variables de estado, $\mathbf{u}$ el de variables de entrada e $\mathbf{y}$ el de variables de salida. Esta representación del sistema como un sistema lineal se denomina “en el espacio de las variables de estado” (“state-space”) y es particularmente útil porque muchos paquetes de cálculo ya tienen incorporados algoritmos de resolución.

A su vez, si se cuenta con la representación del sistema en variables de estado se puede obtener la representación en el dominio de Laplace como función de transferencia:

Tomando transformadas $\mathbf{X}(s) = (s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\mathbf{U}(s)$

Sustituyendo $\mathbf{Y}(s) = \left[\mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}\right]\mathbf{U}(s)$

O sea que $\mathbf{G}(s) = \mathbf{C}(s\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B}$

Véase ‘ejem.8.4’.