Sistemas de Comunicación

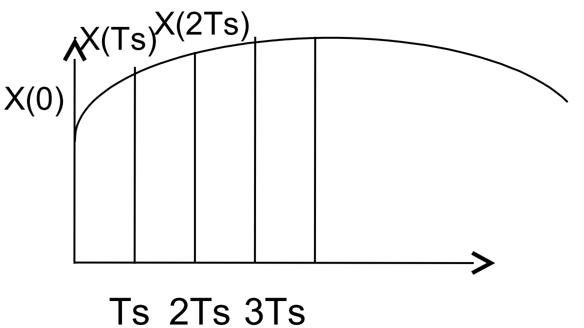
Clase 11: Modulación Analógica de Pulsos

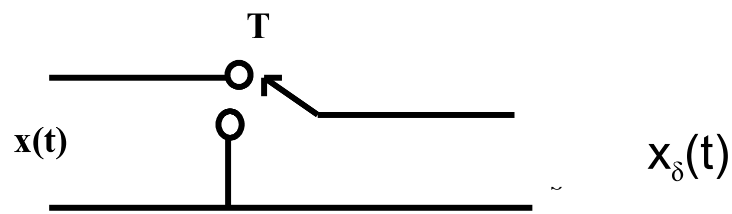
Objetivo

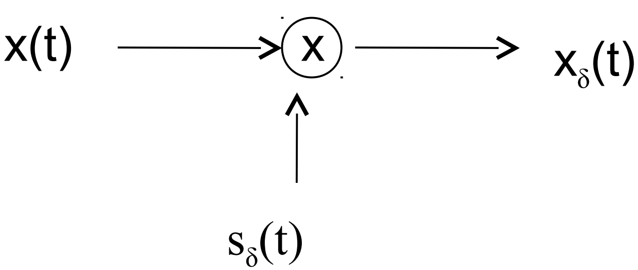
- Muestreo no ideal
- Modulación PAM – amplitud analógica y digital
- PDM (duración) y PPM (posición)

Muestreo Ideal

- Señal de ancho de banda finito W
- Muestras equiespaciadas







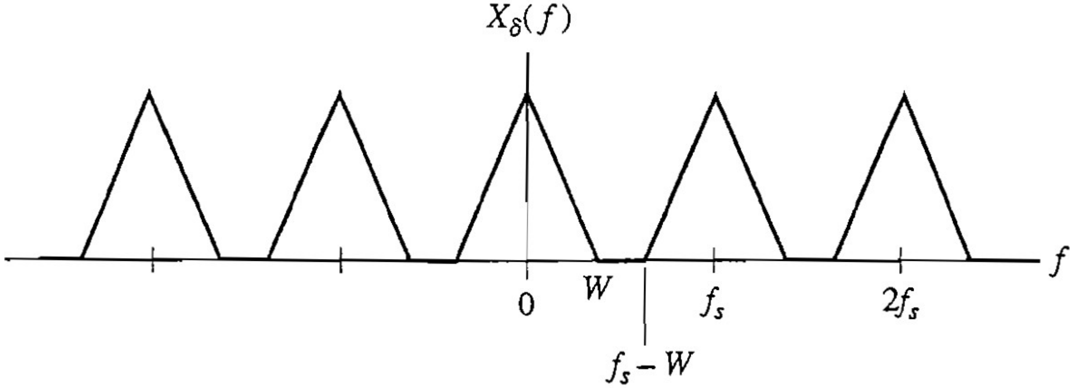
$$s_\delta(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)\longleftrightarrow S_\delta(f)=\frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f-kf_s)$$

$$x_\delta(t)=x(t).\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(t-kT_s)=\sum_{-\infty}^{+\infty}x(kT_s)\delta(t-kT_s)$$

Espectro muestreo Ideal

$$X_\delta(f) = X(f) * S_\delta(f) = X(f) * \frac{1}{T_s}\sum_{-\infty}^{+\infty}\delta(f - kf_s)$$

$$X_\delta(f) = f_s\sum_{-\infty}^{+\infty} X(f - kf_s)$$

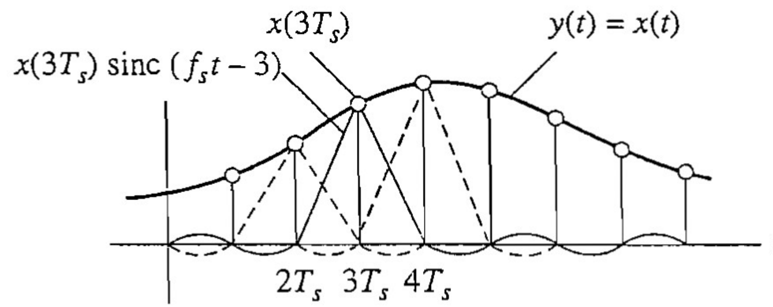


Teorema de muestreo

Una señal de energía finita con ancho de banda finito W, se describe completamente por sus muestras en instantes de tiempo periódicos $Ts \leq 1/2W$.

Reconstrucción: Si una señal ha sido muestreada a la cadencia de Nyquist ($fs=2W$) o mayor ($fs \geq 2W$), la señal se puede reconstruir de sus muestras mediantes filtrado ideal pasabajos de ancho de banda B con $W \leq B \leq fs-W$

Reconstrucción



$$H(f) = c\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)e^{-jwt_d}$$

$$y(t) = x_\delta(t) * F^{-1}(H(f)) = x_\delta(t) * h(t)$$

$$y(t) = 2Bc\sum_{-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\mathrm{sinc}\,2B(t - t_d - kT_s)$$

por simplicidad supondremos $B = \frac{f_s}{2}, c = \frac{1}{f_s}$ y $t_d = 0$

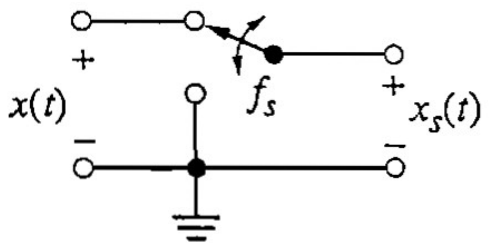
$$y(t) = \sum_{-\infty}^{+\infty} x(kT_s)\,\mathrm{sinc}\,(f_s t - k)$$

Reconstruir con un pasabajos ideal = interpolar con sinc ideal

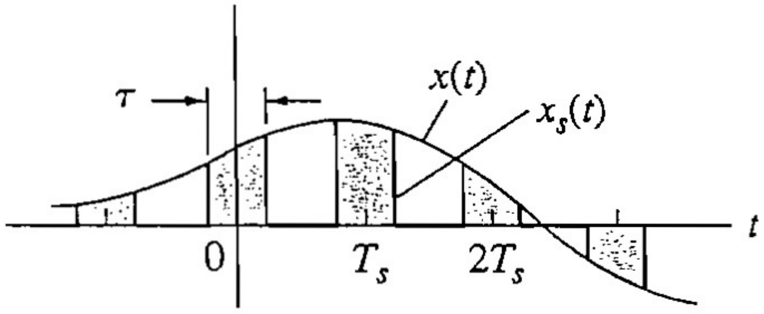
Muestreo Real (no ideal)

Tomar muestras instantáneas es tecnológicamente imposible, se aproxima de distintas formas.

Muestreo Chopeado : Se copia el valor de la señal durante un tiempo pequeño.

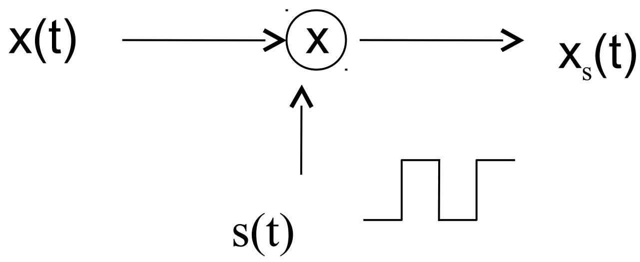


(a)



(b)

Muestreo Chopeado



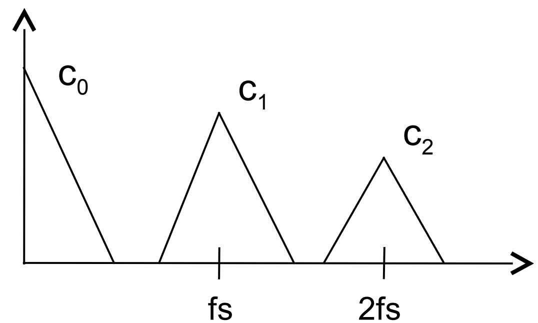
$s(t)$: tren de pulsos de período T_s y ancho τ.

$$s(t) = \sum_k \Pi\left(\frac{t - kT_s}{\tau}\right) = \sum_k c_k e^{j2\pi k f_s t}$$

$$c_k = f_s \int_{\frac{-T_s}{2}}^{\frac{T_s}{2}} s(t) e^{-j2\pi k f_s t} dt = f_s \tau \operatorname{sinc}\left(k f_s \tau\right)$$

Espectro Muestreo Chopeado

Si τ es pequeño respecto a T_s los coeficientes de la SF decrecen lentamente.



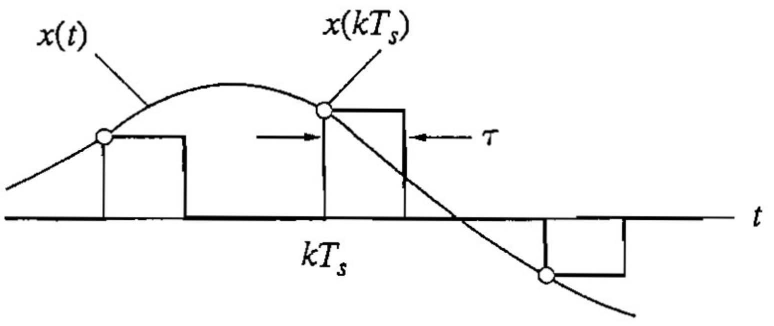
$$S(f) = \sum_k c_k \delta(f - kf_s)$$

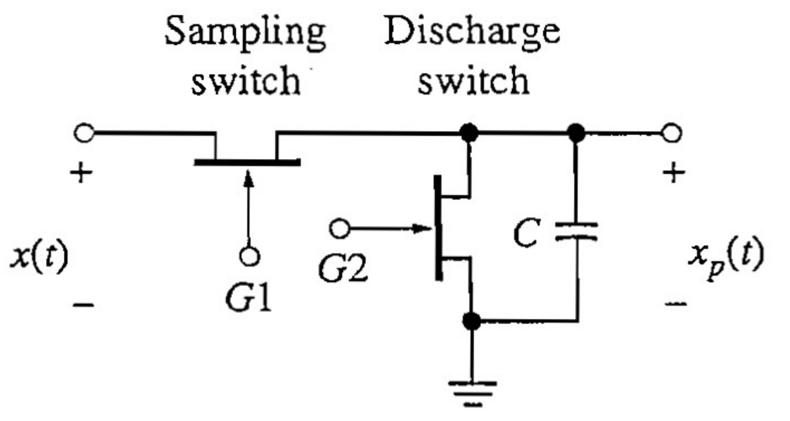
$$X_S(f) = X(f) * S(f) = X(f) * \sum_k c_k \delta(f - kf_s)$$

$$X_S(f) = \sum_k c_k X(f - kf_s)$$ Espectro períodico ponderado

por coeficientes de la serie de fourier. Reconstrucción pasabajos.

Muestreo Flat-Top





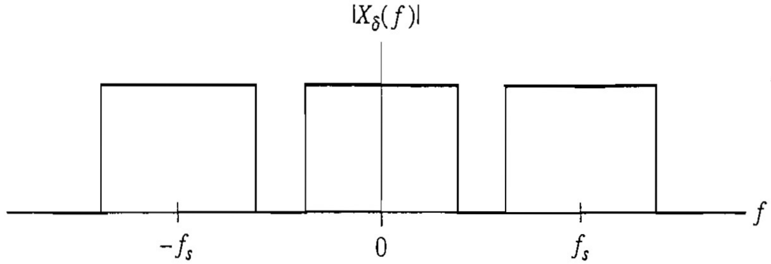
$$x_p(t) = \sum_k x(kT_s)\,p(t - kT_s) \quad \text{con } p(t) = \Pi\left(\frac{t}{\tau}\right)$$

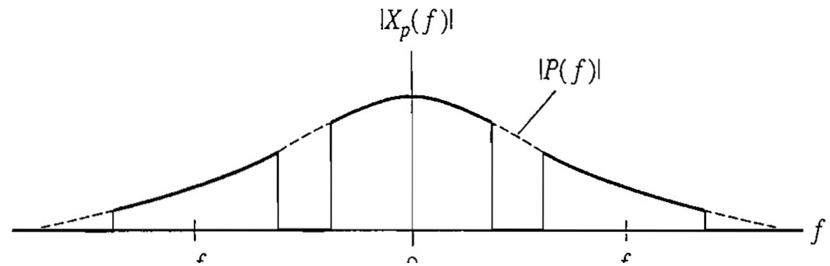
$$x_p(t) = x_\delta(t) * p(t) = p(t) * \sum_k x(kT_s)\,\delta(t - kT_s)$$

$$X_p(f) = X_\delta(f).P(f) \quad \text{con} \quad P(f) = \tau \,\text{sinc}(f\tau)$$

Muestreo Flat -Top

Carlson



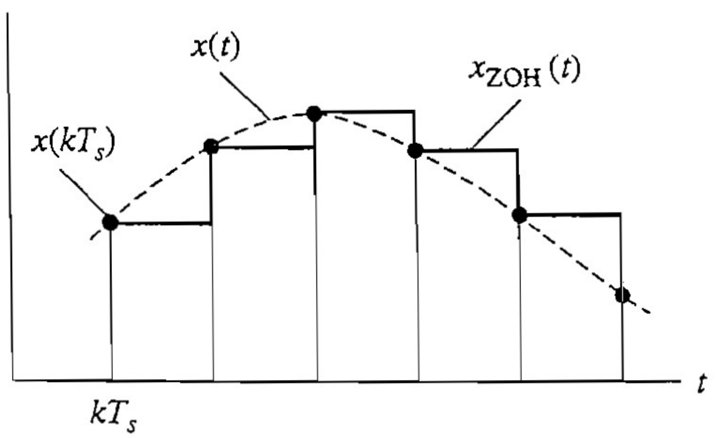


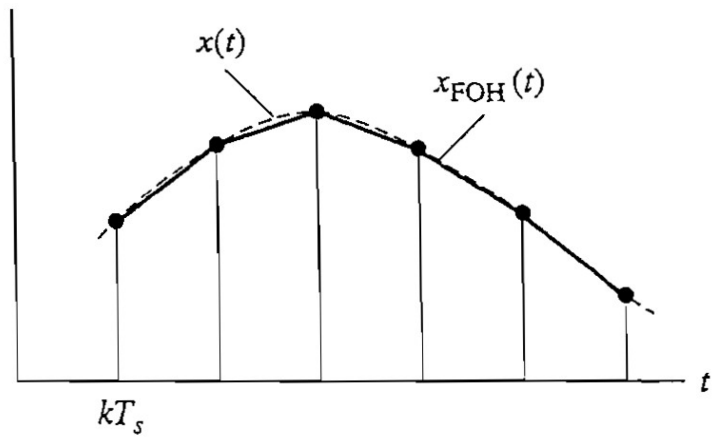
Cuanto más pequeño sea τ menor será el efecto de apertura.

Si recupero con filtrado pasabajo necesito filtro ecualizador

$$H_{eq}(f) = \frac{ke^{-jwt_0}}{P(f)}$$ para cancelar distorsión

Métodos de Reconstrucción prácticos





ZOH - Retenedor de orden cero $y(t) = \sum_k x(kT_s)\Pi\left(\frac{t-kT_s}{T_s}\right)$

FOH - Retenedor de orden uno $y(t) = \sum_k x(kT_s)\Lambda\left(\frac{t-kT_s}{T_s}\right)$

Muestreo práctico y solapamiento

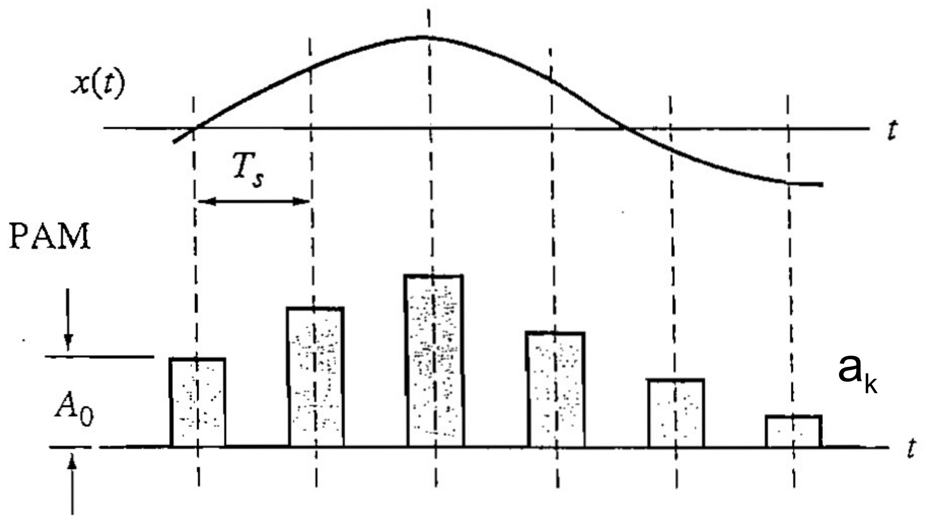
- Pulsos de duración finita en muestreo
- Reconstrucción real con efecto apertura:

$$\left|H_{ZOH}(f)\right| = \left|T_s \operatorname{sinc} fT_s\right|$$

$$\left|H_{FOH}(f)\right| = \left|T_s \sqrt{1+(2\pi fT_s)^2} \operatorname{sinc}^2 fT_s\right|$$

- Los mensajes a ser muestreados no son limitados en frecuencia, existe solapamiento

Modulación Amplitud de Pulso (PAM)



a_k: valores continuos (PAM analógica) o discretos (PAM digital)

Descripción analítica de la señal PAM

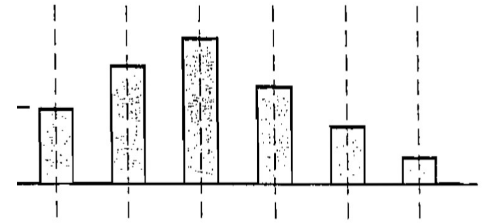
$$x_{PAM}(t) = \sum_k a_k p(t - kT_s - t_d)$$

con $t_d : U[0, T_d]$ retardo aleatorio

$$a_k = \begin{cases} x[k] : \text{muestras de la señal - PAM analogica} \\ [-1,1] : \text{onda binaria aleatoria - PAM digital} \end{cases}$$

PAM

$$a_k \longrightarrow \boxed{p(t-t_d)} \longrightarrow x_{PAM}(t)$$



Secuencia randómica estacionaria sentido amplio

$p(t)$: pulso conformador determinítico t_d retardo aleatorio U[0,Ts]

Proceso estacionario en sentido amplio

En estas hipótesis $R_{x_{PAM}}(\tau)$ es determinítica

$$\boxed{G_{x_{PAM}}(f) = \frac{|P(f)|^2}{T_s} \sum_{-\infty}^{+\infty} R_a[k] e^{-j2\pi f k T_s}} \quad \text{con } R_a[k] = R_x(kT_s)$$

$$G_{x_{PAM}}(f) = |P(f)|^2 G_a(f)$$

Espectro PAM

Caso particular : Símbolos no correlacionados

$$R_a[k] = E(a_j.a_{j+k}) = \begin{cases} \sigma_a{}^2 + m_a{}^2 & k = 0 \\ m_a{}^2 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} R_a[k] e^{-j2\pi fkT_b} = \sigma_a{}^2 + m_a{}^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi fkT_b} = \sigma_a{}^2 + \frac{m_a{}^2}{T_b} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_b}\right)$$

$$\boxed{G_{x_{PAM}}(f) = \sigma_a{}^2 r |P(f)|^2 + (m_a r)^2 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |P(kr)|^2 \delta(f - kr)} \text{ con r} = \frac{1}{T_b}$$

Ej : Espectro de onda binaria aleatoria depende forma del pulso, de la estadística de la secuencia (σ_a, m_a) y de la duración de los bits T_b.

Modulación analógica de pulsos

Si una señal analógica es muestreada en las condiciones del teorema del muestreo, puede ser trasmitida usando modulación analógica de pulsos, donde el valor de la muestra modula algún parámetro del tren de pulsos.

Los parámetros adecuados para la modulación son:

- amplitud, modulación por amplitud de pulso (PAM)
- duración, modulación por duración de pulso (PDM)
- posición, modulación por posición de pulso (PPM)

PAM

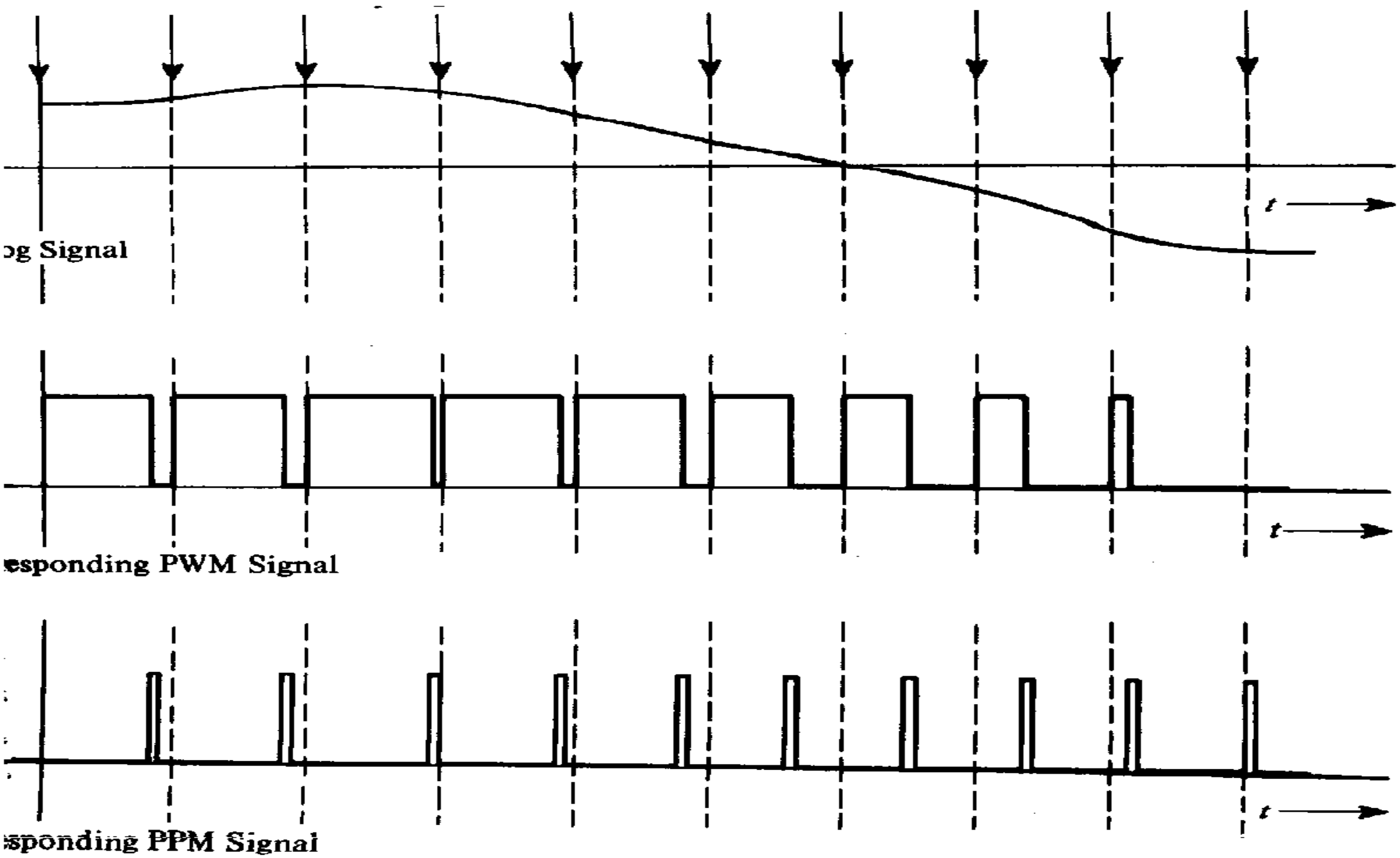
$$x_p(t) = A_0 \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[1 + \mu x(kT)\right] p(t - kT) \; con \; \left|x(t)\right| \leq 1$$

$$X_{PAM}(f) = A_0 P(f).f_T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \left[\delta(f - nf_T) + \mu X(f - nf_T)\right]$$

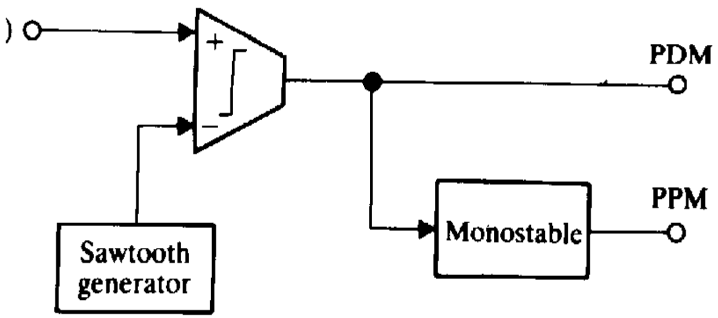
Dado que es igual al resultado que se obtuvo en el muestreo flat top pero sustituyendo *x´ (kT) =1+ m x(kT)*

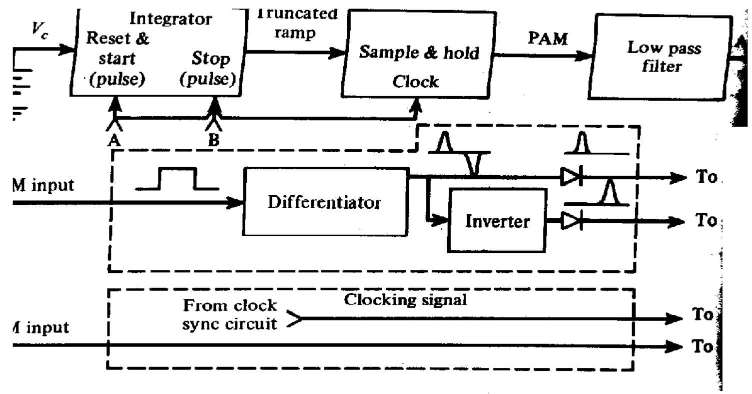
La reconstrucción requiere: bloqueo de continua, filtrado pasabajos y ecualización.

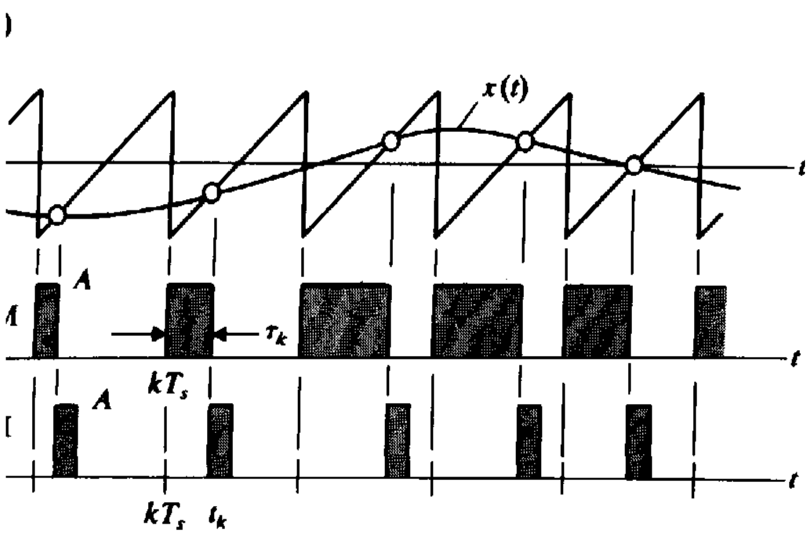
PDM (PWM) y PPM

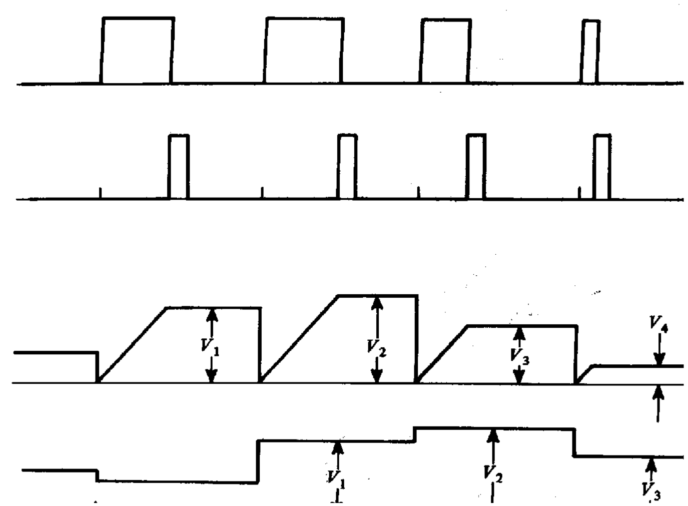


Generación/Detección de PDM y PPM









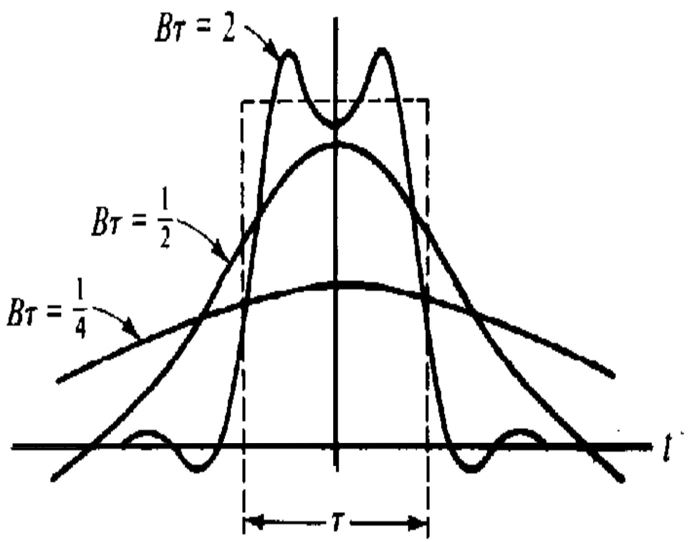
Ventajas /Desventajas

- PAM/PPM: La información se trasmite en la amplitud o posición pero con un ancho fijo puedo trasmitir pulsos estrechos con el consiguiente ahorro de energía por estar off la mayor parte del tiempo.
- PAM : permite multiplexar en el tiempo (TDM) usar el canal para trasmitir distintas señales.
- PPM/PDM: amplitud constante tiene inmunidad frente al ruido aditivo.

Desventajas:

- Necesidad de sincronismo
- Ancho de banda de trasmisión

Ancho de banda necesario



- Para poder reproducir la forma de onda se necesita $B_T >> 1/\tau$
- Para medir la amplitud del pulso o detectar presencia o ausencia de pulso $B_T \geq 1/2\tau$
- Para determinar la posición del pulso $B_T >> 1/2\tau >> W$ (PPM/PDM)
- En PAM $B_{TPAM} \geq 1/2\tau \geq fs/2 \geq W$.

Existen distintos criterios para determinar ancho de banda: absoluto, 3dB, equivalente, cruce por cero, etc. Se debe referenciar criterio usado.