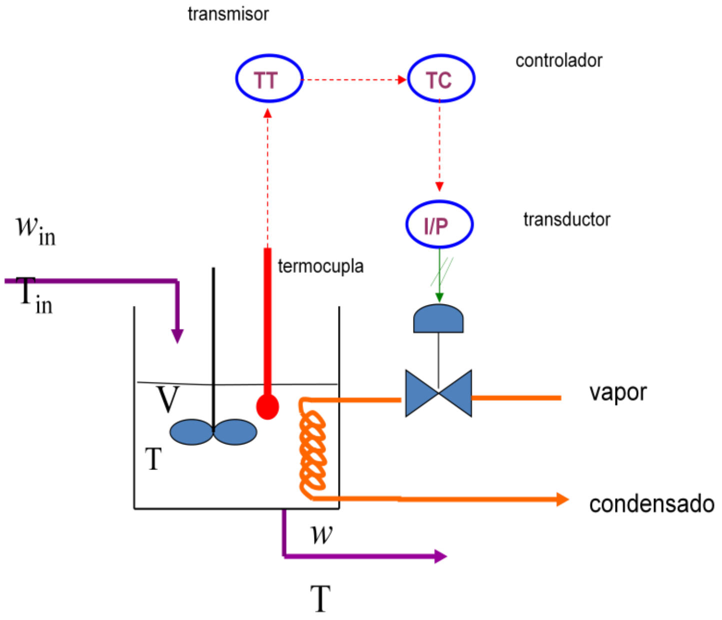
14 DINÁMICA DEL BUCLE CERRADO

Los controladores forman parte del bucle de control feedback y, cuando éste está efectivamente cerrado, modifican la respuesta dinámica del sistema. Consideremos un ejemplo, un tanque agitado calentado mediante un serpentín con vapor:



Hallamos primero las funciones de transferencia del proceso, partiendo de los balances de energía, del tanque y del calefactor:

$$mC\frac{dT}{dt} = wC(T_{in} - T) + h_p A_p (T_w - T)$$

$$m_w C_w \frac{dT_w}{dt} = h_s A_s (T_s - T_w) - h_p A_p (T_w - T)$$

Asumiendo que la dinámica del calefactor es mucho más rápida podemos considerarla segunda ecuación en estado estacionario:

$$0 = h_s A_s (T_s - T_w) - h_p A_p (T_w - T)$$

Con lo cual $$T_w = \frac{h_s A_s T_s + h_p A_p T}{h_s A_s + h_p A_p}$$

Por lo tanto la dinámica del sistema queda determinada por

$$mC\frac{dT}{dt} = wC(T_{in} - T) + UA(T_s - T)$$

donde $$UA = \frac{h_s A_s h_p A_p}{h_s A_s + h_p A_p}$$

La temperatura del vapor la podemos expresar como $T_s = a + bP_s$

entonces $$mC\frac{dT}{dt} = wC(T_{in} - T) + UA(a + bP_s - T)$$

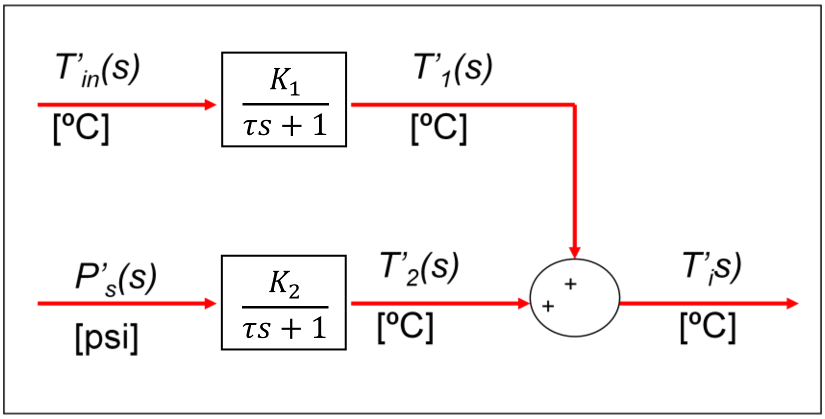
Tomando transformadas y asumiendo variables desviación

$$mCsT'(s) = wc[T'_{in}(s) - T'(s)] + UA[bP'_s(s) - T'(s)]$$

Por lo tanto $$T'(s) = \frac{K_1}{\tau\, s+1} T'_{in}(s) + \frac{K_2}{\tau\, s+1} P'_s(s)$$

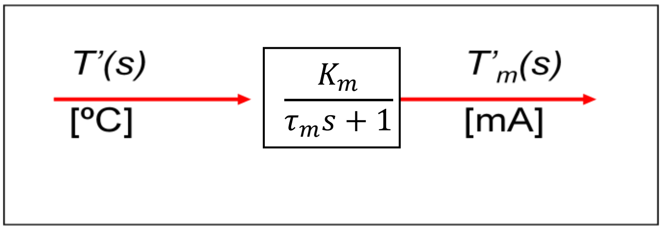
donde
$$\tau = \frac{mC}{wC + UA}$$
$$K_1 = \frac{wC}{wC + UA}$$
$$K_2 = \frac{UA\, b}{wC + UA}$$

El diagrama de bloques correspondiente es

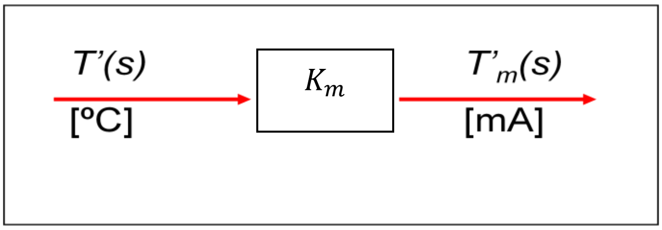


Para la termocupla y el transmisor puede asumirse una dinámica de primer orden:

$$\frac{T'_m(s)}{T'(s)} = \frac{K_m}{\tau_m s + 1}$$



Este elemento puede tener una dinámica despreciable si $\tau >> \tau_m$. En este caso el diagrama de bloques sería



La ganancia K_m es el cociente de los rangos de entrada-salida de la combinación termocupla-transmisor.

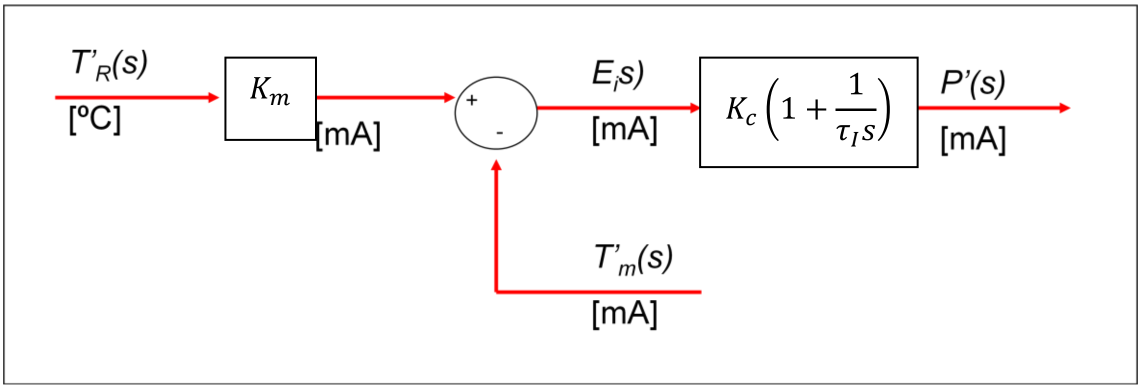
Supongamos que utilizamos un controlador PI:

$$\frac{P'_s(s)}{E(s)} = K_c\left(1+\frac{1}{\tau_I s}\right)$$

$$E(s)=\tilde{T}'_R(s)-T'_m(s)$$

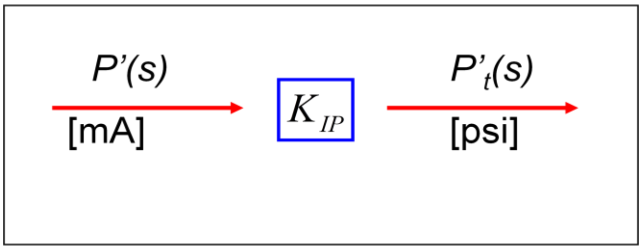
Donde $\tilde{T}'_R$ es el set point expresado como señal eléctrica.

$$\tilde{T}'_R = K_m T'_R$$



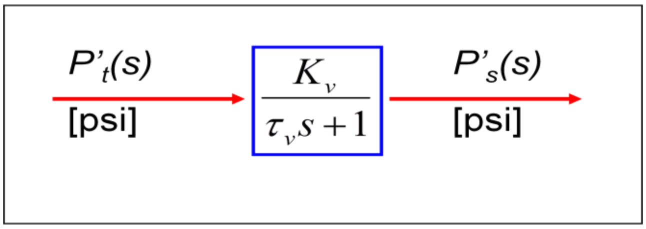
Para el transductor de corriente a presión (I / P) podemos asumir también que tiene una dinámica muy rápida y entonces

$$\frac{P'_t(s)}{P'(s)} = K_{IP}$$

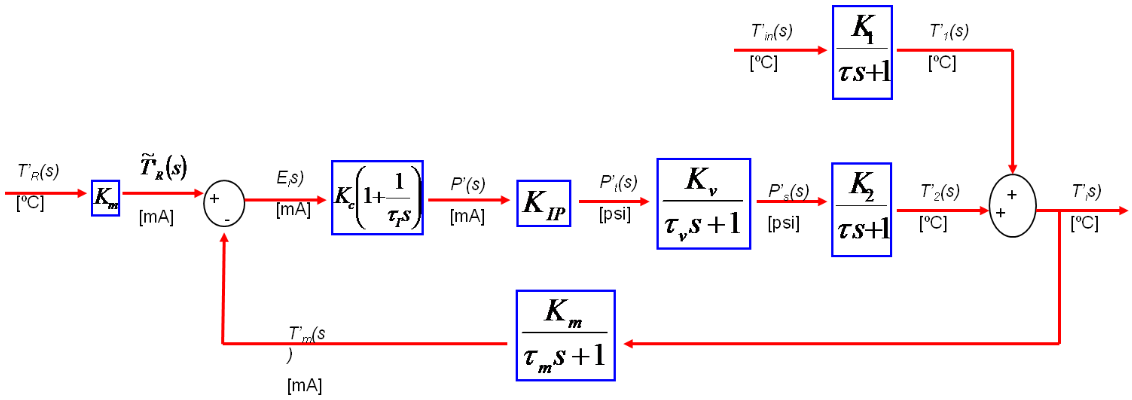


Para la válvula de control asumiremos un comportamiento de primer orden:

$$\frac{P'_s(s)}{P'_t(s)} = \frac{K_v}{\tau_v s + 1}$$

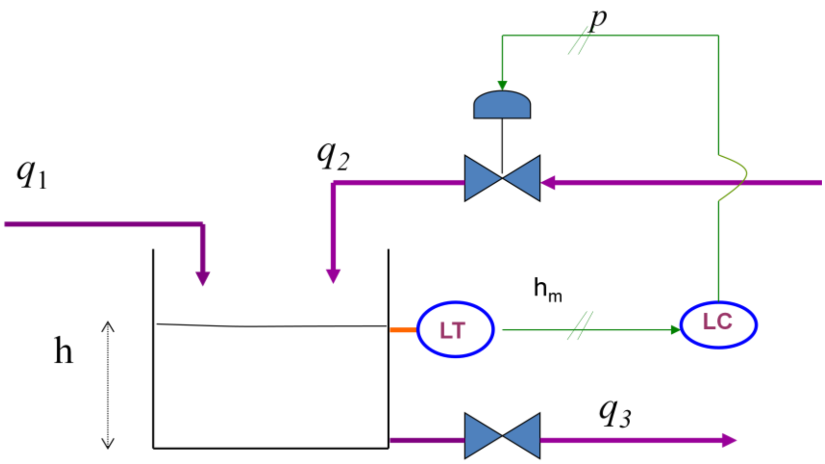


El bucle de control completo resulta entonces



El sistema con bucle de control se puede implementar fácilmente en programas como Scilab o mejor en el programa gráfico Xcos (ver 'ejem14.1.sce' y 'ejem14.1.xcos'; NOTA: en el bloque PID de Xcos hay que escribir el valor del factor total de cada término, esto es, K_c, K_c/τ_I y $K_c\,\tau_D$). Con ellos podemos evaluar fácilmente las respuestas.

Veamos otro ejemplo, un tanque agitado con una entrada de líquido constante y otra entrada regulable a través de una válvula gobernada por un controlador que recibe la señal de un sensor de nivel.



Del balance de masa

$$\rho A\frac{dh}{dt} = \rho q_1 + \rho q_2 - \rho q_3$$

O bien

$$A\frac{dh'}{dt} = q'_1 + q'_2 - \frac{h'}{R}$$

De modo que

$$\frac{H'(s)}{Q'_2(s)} = G_p(s) = \frac{K_p}{\tau\ s+1}$$

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = G_L(s) = \frac{K_p}{\tau\ s+1}$$

donde

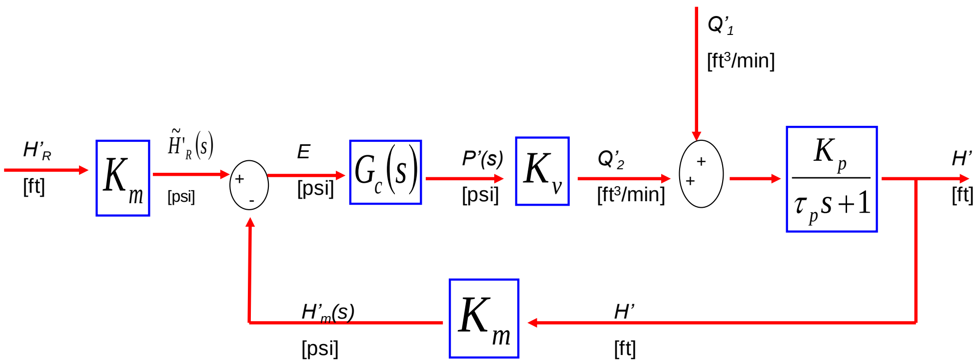
$$K_p = R$$

$$\tau = RA$$

Asumimos

$$G_m(s) = K_m$$

$$G_v(s) = K_v$$



Supongamos que tenemos un control proporcional $\qquad G_c(s) = K_c$

y aplicamos un cambio en el set point en forma de escalón

$$\frac{H'(s)}{H'_R(s)} = \frac{K_cK_vK_pK_m/(\tau\ s+1)}{1+K_cK_vK_pK_m/(\tau\ s+1)} = \frac{K_1}{\tau_1 s+1}$$

donde

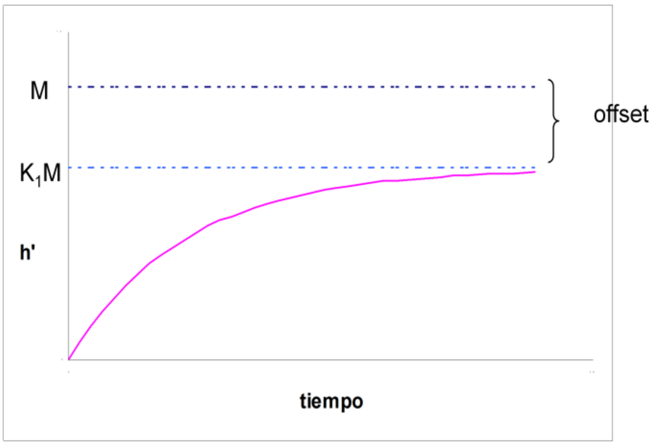
$$K_1 = \frac{K_{OL}}{1+K_{OL}}$$

$$\tau_1 = \frac{\tau}{1+K_{OL}}$$

$$K_{OL} = K_cK_vK_pK_m$$

Si aplicamos un escalón de alto M al set point la respuesta será

$$h'(t) = K_1M\left(1-e^{-t/\tau_1}\right)$$



Como el $offset = h'_R(\infty) - h'(\infty)$

entonces $$offset = M - K_1 M = \frac{M}{1+K_{OL}}$$

A medida que K_c aumenta el offset se reduce.

Si analizamos la incidencia de un cambio en la carga (perturbaciones) la función de transferencia será

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{K_p/(\tau\ s+1)}{1+K_cK_vK_pK_m/(\tau\ s+1)} = \frac{K_2}{\tau_1 s+1}$$

donde

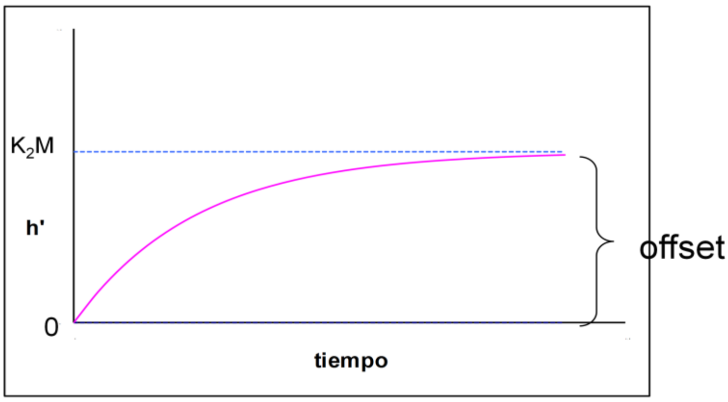
$$K_2 = \frac{K_p}{1+K_{OL}}$$

$$\tau_1 = \frac{\tau}{1+K_{OL}}$$

$$K_{OL} = K_cK_vK_pK_m$$

Si ocurre una perturbación en escalón de altura M

$$h'(t) = K_2 M\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right)$$



Y ahora $$offset = 0 - K_2 M = -\frac{K_p M}{1 + K_{OL}}$$

También ahora a medida que K_c aumenta el offset se reduce.

Supongamos ahora que consideramos un controlador PI

$$G_c(s) = K_c\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right)$$

Si llamamos $$K_{OL} = K_c K_v K_p K_m$$

$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{K_p \big/ (\tau\ s + 1)}{1 + K_{OL}\left(1 + \frac{1}{\tau_I s}\right) \Big/ (\tau\ s + 1)}$$

$$= \frac{K_p \tau_I s}{\tau_I s(\tau\ s + 1) + K_{OL}(\tau_I s + 1)}$$

$$= \frac{K_3 s}{\tau_3{}^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1}$$

Donde

$$K_3 = \tau_I \big/ K_c K_v K_m$$

$$\zeta_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{1 + K_{OL}}{\sqrt{K_{OL}}}\right)\sqrt{\tau_I \big/ \tau}$$

$$\tau_3 = \sqrt{\tau_I \tau \big/ K_{OL}}$$

O sea que el sistema con el bucle de control se comporta como un sistema de segundo orden. Si en la entrada tenemos un escalón unitario

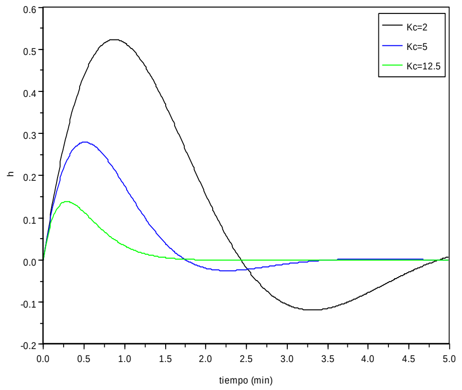
$$Q'_1(s) = \frac{1}{s}$$

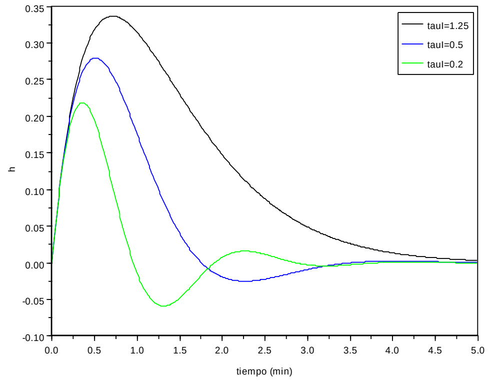
$$H'(s) = \frac{K_3}{\tau_3{}^2 s^2 + 2\zeta_3 \tau_3 s + 1}$$

Y para $0 < \zeta_3 < 1$ la respuesta es una oscilación amortiguada

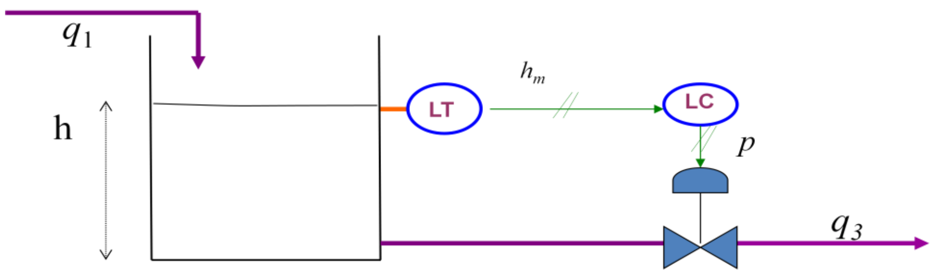
$$h'(t) = \frac{K_3}{\tau_3\sqrt{1 - \zeta_3{}^2}}\, e^{-\zeta_3 t / \tau_3} \sin\left[\sqrt{1 - \zeta_3{}^2}\left(t \big/ \tau_3\right)\right]$$

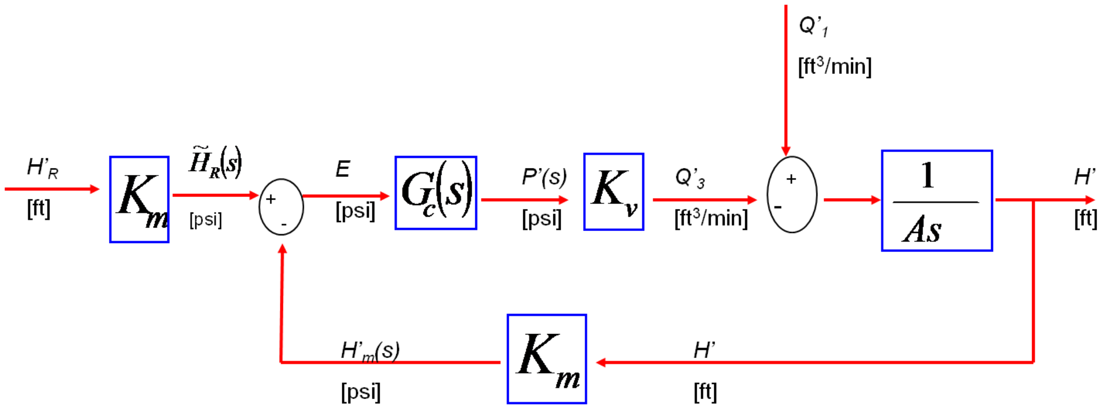
En este caso el offset es nulo debido al término integral del controlador.





Analicemos que ocurre con un controlador PI aplicado a un proceso integrador como el siguiente:





$$\frac{H'(s)}{Q'_1(s)} = \frac{K_p s}{1 + G_c K_v K_p K_m}$$

$$= \frac{K_4 s}{\tau_4{}^2 s^2 + 2\zeta_4 \tau_4 s + 1}$$

donde

$$K_p = 1/A$$

$$K_{OL} = K_c K_v K_p K_m$$

$$K_4 = -\tau_I / K_c K_v K_m$$

$$\tau_4 = \sqrt{\tau_I / K_{OL}}$$

$$\zeta_4 = 0.5\sqrt{K_{OL}\tau_I}$$

También el sistema con el bucle de control se comporta como uno de segundo orden. Por lo tanto producirá una respuesta oscilatoria para $0 < \zeta_4 < 1$. La reducción de esa oscilación (aumento de ζ_4) se puede lograr aumentando tanto K_c como τ_I . El efecto de K_c es opuesto al que normalmente ocurre en otros sistemas.

Hemos despreciado la dinámica del transmitter y la válvula. En la realidad, altos valores de K_c pueden aumentar la oscilación del sistema por estos efectos o inclusive volverlo inestable.