Segundo parcial de Lógica

15 de julio 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje de tipo $\langle -; 2; 1\rangle$, con símbolo de función f y constante c, y la siguiente estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +, k\rangle$ donde k es un natural arbitrario.

a. Defina $\texttt{TERM}_C$, el conjunto de los términos cerrados para ese tipo de similaridad.
b. Defina la función $Cant_f : \texttt{TERM}_C \to \mathbb{N}$ tal que cuenta la cantidad de símbolos f que aparecen en un término. Ej: $Cant_f(c) = 0, Cant_f(f(f(c,c),c)) = 2$
c. Pruebe por inducción que para cualquier término $t \in \texttt{TERM}_C$, $t^{\mathcal{M}} = c^{\mathcal{M}} * (Cant_f(t) + 1)$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 1; 1; 0\rangle$. Se usará el símbolo de predicado P y símbolo de función f.

Sean las siguientes definiciones:

- $\varphi_1 := (\forall x)P(f(x))$
- $\varphi_2 := (\exists x)\neg P(x)$
- $\Gamma := \{\varphi_1, \varphi_2\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. $\models \varphi_1 \wedge \varphi_2$
b. Existe M modelo de Γ con universo $\mathbb{N}$.
c. Existe M modelo de Γ con universo $\{\bullet\}$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(\forall x)(P(x, f(x), g(x)) \leftrightarrow f(x) =' g(x)), (\forall x)g(x) =' x, (\forall x)f(x) =' c \vdash (\exists y)P(y, f(y), g(y))$
b. $(\forall x)(\exists y)f(y) =' x \vdash (\forall x)P(f(x)) \leftrightarrow (\forall x)P(x)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1; 2; 1\rangle$, y alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c.

Sean:

- $\varphi := (\forall x)(\forall y)(P(x) \to f(x, y) =' c)$
- $M_1 := \langle \mathbb{N}, \{0\}, *, 0\rangle$
- $M_2 := \langle \{\bullet, \circ\}, \{\bullet, \circ\}, F, \circ\rangle$, donde para cualquier a y b del universo, $F(a, b) = \circ$.
- $\mathcal{K} := \{M_1, M_2\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

a. $\varphi \in Th(\mathcal{K})$
b. $Mod(\{\varphi\}) \neq \emptyset$
c. $Th(Mod(\{\varphi\}))$ es consistente maximal