

Segundo parcial de Lógica

4 de julio 2023

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo de similaridad $\langle 1; 2, 1; 1 \rangle$ con símbolo de predicado Q , símbolos de función f y g y símbolo de constante c_1 y la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{Z}, \mathbb{N}, +, ^2, 1 \rangle$.

- Defina el conjunto TERM_C de términos cerrados (sin constantes extendidas) del lenguaje.
- Demuestre por inducción que $(\forall t \in \text{TERM}_C) \mathcal{M} \models Q(t)$.
- Considere un término cualquiera s tal que $V(s) = \{x\}$. Pruebe usando la parte anterior que $(\forall t \in \text{TERM}_C) s[t/x]^{\mathcal{M}} \geq 0$.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Se considera un lenguaje de primer orden con igualdad, con tipo de similaridad $\langle 2; 1; 0 \rangle$, con símbolo de predicado P y símbolo de función f .

Sean las fórmulas:

- $\varphi := (\forall x)P(f(x), x)$
- $\psi := (\forall z)(\exists y)P(y, z)$

- Pruebe que $\varphi \vdash \psi$.
- Encontrar una estructura \mathcal{M}_1 tal que $\mathcal{M}_1 \models \varphi$ y $\mathcal{M}_1 \not\models \psi$. Si no fuera posible indique por qué.
- Encontrar una estructura \mathcal{M}_2 tal que $\mathcal{M}_2 \not\models \varphi$ y $\mathcal{M}_2 \models \psi$. Si no fuera posible indique por qué.
- Indicar cuáles de las siguientes afirmaciones se cumplen y cuáles no. Justifique.
 - $\models \varphi$
 - $\models \neg\varphi \vee \psi$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

- $(\forall x)x =' f(x) \vdash \neg(\exists x)(\exists y)\neg(P(x, y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$
- $(\forall x)f(x, c_0) =' x, (\forall x)f(x, c_1) =' x, (\forall x)(\forall y)f(x, y) =' f(y, x) \vdash c_0 =' c_1$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere los siguientes elementos:

- Un lenguaje de primer orden con igualdad de tipo $\langle -, -; 0 \rangle$.
- $\Gamma = \text{CONS}(\{(\exists x)(\exists y)(\neg x =' y)\})$

- Defina dos estructuras \mathcal{M}_1 y \mathcal{M}_2 tales que ambas modelen Γ y tengan universos con cardinalidad finita y diferente. Justifique su respuesta.
- Sea $\psi = (\exists x)(\exists y)(\exists z)(\neg x =' y \wedge \neg x =' z \wedge \neg y =' z)$
Pruebe que: $\psi \notin \Gamma$. Justifique su respuesta.
- Pruebe que Γ **NO** es Consistente Maximal. Justifique su respuesta.