Segundo parcial de Lógica

5 de julio 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere un lenguaje $\mathcal{L}$ de fórmulas de primer orden **sin igualdad** de tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$ y que tiene sólo los conectivos $\rightarrow, \forall$

a. Escriba definiciones inductivas libres de $TERM_{\mathcal{L}}$ y de $\mathcal{L}$.
b. Defina una función $\mathrm{MV} : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{N}$ que devuelva el máximo índice de variable que aparece en la fórmula. Ej: $\mathrm{MV}((P(x_2) \rightarrow (\forall x_1)P(x_1))) = 2$ o $\mathrm{MV}((P(x_1) \rightarrow (\forall x_2)P(x_1))) = 2$
c. Pruebe por inducción que para todo $\varphi \in \mathcal{L}$ se cumple que $x_{\mathrm{MV}(\varphi)} \in V(\varphi)$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere un lenguaje con tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$ con igualdad y símbolo de predicado P.

Considere las siguientes estructuras:

$$\mathcal{M}_1 = \langle \{0\}, \emptyset\rangle \text{ y } \mathcal{M}_2 = \langle \{0, 1, 2\}, \emptyset\rangle$$

Considere además la siguiente fórmula:

$$\varphi = (\exists x)P(x) \wedge (\exists x)\neg P(x)$$

a. Dé $\alpha \in \mathtt{FORM}$ tal que $\mathcal{M}_1 \models \alpha$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \alpha$.
b. Dé $\beta \in \mathtt{FORM}$ tal que $\mathcal{M}_1 \not\models \beta$ y $\mathcal{M}_2 \not\models \beta$ y β no equivalente a $\perp$.
c. Dé $\mathcal{M}_3$ estructura de tipo adecuado que cumpla que $\mathcal{M}_3 \models \varphi$.
d. Sea $\mathcal{M}_4$ cualquier estructura de tipo adecuado que cumpla $\mathcal{M}_4 \models \varphi$. ¿Cuál es la cardinalidad mínima que debe tener el universo de $\mathcal{M}_4$? Justifique.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Nota: En este ejercicio no se aceptan consideraciones semánticas.

Escribir derivaciones para:

a. $(\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z) \vdash t_1 =' t_2$
   Considere que $z \notin V(t_1) \cup V(t_2)$.
b. $\vdash (\exists z)(t_1 =' z \wedge t_2 =' z) \leftrightarrow (\forall x)(t_1 =' x \to t_2 =' x)$
   Considere que x y z no pertenecen a $V(t_1) \cup V(t_2)$.

   Sugerencia: Use la derivación de la parte a para construir la derivación b.

Ejercicio 4 (15 puntos)

a. Probar para toda $\varphi \in \texttt{SENT}$ que:

   Existe $\mathcal{M}$ tal que $\mathcal{M} \not\models \varphi$ si y solo si $\textsc{Cons}(\{\neg\varphi\}) \neq \texttt{SENT}$.
b. Probar que:

   I. Para todo $\Gamma \subseteq \texttt{SENT}$ y para toda estructura $\mathcal{M}$ del tipo adecuado:

      Si Γ es consistente maximal y $\mathcal{M} \models \Gamma$ entonces $\Gamma = \mathit{Th}(\{\mathcal{M}\})$.

   II. Para todo $\Gamma \subseteq \texttt{SENT}$:

      Γ es consistente maximal si y solo si existe una estructura $\mathcal{M}$ tal que $\Gamma = \mathit{Th}(\{\mathcal{M}\})$