Segundo parcial de Lógica

12 de julio 2021

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle 1; 1, 2; 1 \rangle$ con símbolo de predicado P, símbolos de función unario f, binario g y símbolo de constante c.

a. Defina inductivamente el conjunto $\texttt{TERM}_C$ de los términos cerrados (sin constantes extendidas) de $\mathcal{L}$.

b. Considere la estructura $\mathcal{Z} = \langle \mathbb{Z}, \mathbb{N}, \texttt{Menos2}, +, 1 \rangle$, donde $\texttt{Menos2}$ es la función que resta 2 y $+$ la función suma de enteros.

   I. Dé $s_1, s_2 \in \texttt{TERM}_C$ tales que $s_1^{\mathcal{Z}} = -1$ y $s_2^{\mathcal{Z}} = 0$.

   II. Demuestre o dé un contraejemplo de la siguiente afirmación:

$$(\bar{\forall} t_1 \in \texttt{TERM}_C)(\bar{\forall} t_2 \in \texttt{TERM}_C)(t_1 \neq t_2 \Rightarrow t_1^{\mathcal{Z}} \neq t_2^{\mathcal{Z}})$$

c. Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \texttt{PROP}, \texttt{CONT}, F, G, \neg\bot \rangle$, donde

   $\texttt{CONT} = \{\varphi \in \texttt{PROP} : \not\models \varphi \text{ y } \not\models \neg\varphi\}$ y $F : \texttt{PROP} \to \texttt{PROP}$, $G : \texttt{PROP} \times \texttt{PROP} \to \texttt{PROP}$ se definen como:

$$F(\varphi) = (\neg\varphi)$$
$$G(\varphi, \psi) = \varphi$$

   Demuestre por inducción o dé un contraejemplo de las siguientes afirmaciones:

   I. $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)(\mathcal{M} \models \neg P(t))$

   II. $(\bar{\forall} t \in \texttt{TERM}_C)(\mathcal{M} \models \neg P(t) \to P(f(t)))$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Importante: En este ejercicio se deben justificar las respuestas sin utilizar los teoremas de **corrección** y **completitud**.

Sea $\alpha \in \texttt{FORM}$ con $\mathrm{FV}(\alpha) = x_1$.
Se consideran las siguientes afirmaciones:

(A_1) Existe una estructura $\mathcal{M}$ que cumple $\mathcal{M} \models \alpha$

(A_2) Existe $\beta \in \texttt{FORM}$ tal que $\models \alpha \vee \beta$.

(A_3) Existe $\beta \in \texttt{SENT}$ tal que $\models \alpha \wedge \beta$

Indique para cada una de las afirmaciónes anteriores si permiten deducir la siguiente afirmación:

(A_0) α es una verdad lógica (esto es: $\models \alpha$).

Dicho de otra manera, debe determinar si se cumple:

$$\text{Si } (A_i) \text{ entonces } (A_0)$$

para $1 \leq i \leq 3$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. **En ningún caso son válidas consideraciones semánticas.**

a.

$$(\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to (\forall z)(P(z,y) \vee P(z,x))), (\forall x)(\neg P(x,x)) \vdash (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x))$$

b.

$$(\exists y)(\forall x)P(x,y) \vdash ((\forall x)(\exists y)P(x,y)) \wedge (\neg(\forall y)(\exists x)\neg P(x,y))$$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere los siguientes conjuntos con el tipo de similaridad $< 1;1;0 >$
$\Delta_1 = \{(\forall x)P(x) \wedge \neg(\exists x)P(x)\}$
$\Delta_2 = \{(\forall x)(P(x) \to (\exists y)f(x) =' y)\}$
$\Delta_3 = \{(\forall x)(P(x) \wedge (\exists y)f(y) =' x)\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:

a. $CONS(\Delta_1 \cup \Delta_2)$ es teoría consistente.
b. $Mod(\Delta_3) \subseteq Mod(CONS(\Delta_3))$.
c. $CONS(\Delta_2) \cup CONS(\Delta_3)$ es teoría consistente.
d. $Mod(\Delta_1) \cup Mod(\Delta_3) \subseteq Mod(\Delta_1 \cup \Delta_3)$