

Segundo parcial de Lógica

1 de julio 2019

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sean los siguientes lenguajes de primer orden con igualdad:

- \mathcal{L}_1 de tipo de similaridad $\langle 1, 2; 1, 2; 2 \rangle$ con el alfabeto habitual.
- \mathcal{L}_2 de tipo de similaridad $\langle 2, 1; 2, 1; 0 \rangle$ con el alfabeto habitual.

- a. I. Defina inductivamente el conjunto de los términos (sin constantes extendidas) de \mathcal{L}_1 : $\text{TERM}_{\mathcal{L}_1}$.
- II. Defina inductivamente el conjunto de los términos (sin constantes extendidas) de \mathcal{L}_2 : $\text{TERM}_{\mathcal{L}_2}$.
- b. Determine si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas. Justifique su respuesta:
- I. $\text{TERM}_{\mathcal{L}_1} \cap \text{TERM}_{\mathcal{L}_2} = \emptyset$
- II. $\text{TERM}_{C\mathcal{L}_2} \subseteq \text{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$
siendo $\text{TERM}_{C\mathcal{L}_1}$ y $\text{TERM}_{C\mathcal{L}_2}$ el conjunto de los términos **cerrados** de \mathcal{L}_1 y \mathcal{L}_2 respectivamente.
- c. Dadas:
- $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, \text{Par}, \leq, +1, +, 2, 0 \rangle$
 - $\mathcal{M}_2 = \langle \Sigma^*, A, B, \text{concatenar}, \text{largo} \rangle$, con $\Sigma = \{a, b, c\}$
donde: $A = \{(w_1, w_2) \in \Sigma^* \times \Sigma^* / \text{largo}(w_1) = \text{largo}(w_2)\}$
 $B = \{w \in \Sigma^* / \text{largo}(w) \text{ es par} \}$
 - $\mathcal{M}_3 = \langle \emptyset, \emptyset \rangle$
- I. Determine si $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{M}_3$ son estructuras para algún tipo de similaridad determinado. Justifique su respuesta.
- II. Para aquellas que sean estructuras de la parte anterior determine si son de tipo adecuado para el lenguaje \mathcal{L}_1 . Justifique su respuesta.
- III. Ídem para \mathcal{L}_2 .
- d. Sea la estructura $\mathcal{M}_4 = \langle \mathbb{Z}, \text{Par}, \emptyset, +2, +, 0, 2 \rangle$ de tipo adecuado para el lenguaje \mathcal{L}_1 .
- I. Demuestre que $(\bar{v}t \in \text{TERM}_{C\mathcal{L}_1})(t^{\mathcal{M}_4} \text{ es par})$.
- II. Determine si es verdadero o falso: $\mathcal{M}_4 \models P_1(x)$. Justifique la respuesta.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1, 1; -; 0 \rangle$ y alfabeto con símbolos de predicado P y Q .

Considere las siguientes sentencias:

$$\alpha = (\exists x)P(x) \rightarrow \neg(\forall x)(\neg P(x))$$

$$\beta = (\exists x)(P(x) \wedge \neg Q(x))$$

$$\rho = (\forall x)(P(x) \rightarrow Q(x))$$

$$\delta = \neg(\forall x)(\neg P(x) \vee Q(x))$$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- $(\bar{\forall} \varphi \in \text{SENT})(\alpha \models \varphi \Rightarrow \models \varphi)$.
- $\rho \models \delta$.
- $\beta, \rho \models \delta$.
- $(\bar{\exists} \Gamma \subseteq \text{SENT})(\Gamma \cup \{\beta\} \not\models \alpha)$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Dadas las siguientes sentencias:

- $\alpha = (\forall v)(\exists x)P(v, x)$
- $\beta = (\forall v)(\forall y)(\forall w)(P(v, y) \rightarrow (P(v, w) \rightarrow y \doteq w))$
- $\varphi = (\forall v)(\exists x)(\forall z)(P(v, z) \leftrightarrow x \doteq z)$

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

- $\varphi \vdash \alpha$
- $\varphi \vdash \beta$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad de tipo de similaridad $\langle 1, 1; 1; 0 \rangle$, y alfabeto con símbolos de predicado P y Q y símbolo de función f .

Sean:

- $\Delta = \{(\forall x)(\exists y)f(x) = y, (\forall x)P(x)\}$
- \mathbb{E} el conjunto de todas las estructuras adecuadas para el tipo de similaridad dado.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

- $(\bar{\exists} \Delta' \subseteq \Delta)(\emptyset \neq \Delta' \text{ y } \text{Mod}(\Delta') = \mathbb{E})$.
- $(\bar{\exists} \varphi \in \text{SENT})(\text{Mod}(\{\varphi\}) \neq \emptyset \text{ y } \text{CONS}(\Delta \cup \{\varphi\}) = \text{Th}(\emptyset))$.
- $\text{CONS}(\Delta)$ es consistente maximal.