Segundo parcial de Lógica

2 de julio 2018

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Considere el lenguaje $\mathcal{L}$ de tipo de similaridad $\langle -; 1; 1\rangle$ con símbolo de función f y símbolo de constante c, y $\texttt{TERM}_C$ el conjunto de términos cerrados de $\mathcal{L}$ sin constantes extendidas.

a. Sea la estructura $\mathcal{A} = \langle \mathbb{N} \cup \{\bullet, \circ\}, G, \circ\rangle$ donde la definición de G está dada por

$$\begin{array}{rcll} G(\circ) & = & 2 & \\ G(n) & = & \bullet & \text{para todo } n \in \mathbb{N} \\ G(\bullet) & = & \circ & \end{array}$$

Se pide:

i. Definir inductivamente un conjunto infinito $C \subseteq \texttt{TERM}_C$, de forma que

$$(\bar{\forall} t \in C)(t^{\mathcal{A}} = 2).$$

ii. Demostrar usando el PIP adecuado que su propuesta anterior es correcta.

b. Sea la estructura $\mathcal{B} = \langle \{0, 1, 2\}, F, 1\rangle$. Defina F de forma que

$$(\bar{\forall} m \in |\mathcal{B}|)((\bar{\exists} t \in \texttt{TERM}_C)(t \neq c \text{ y } t^{\mathcal{B}} = m)).$$

Justifique su respuesta.

c. Demostrar

$$(\bar{\exists} u \in \texttt{TERM}_C)((\bar{\forall} t \in C)(t^{\mathcal{A}} = u^{\mathcal{B}}))$$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle ArbBin, Izq, Der, Raiz, Generar, \langle 2, null, null\rangle\rangle$ tal que:

1. *ArbBin* es el conjunto de los árboles binarios de naturales definido inductivamente por las siguientes reglas:

   I **null** $\in ArbBin$.

   II Si $n \in \mathbb{N}$ y $A, B \in ArbBin$ entonces $\langle n, A, B\rangle \in ArbBin$

2. *Izq* y *Der* son funciones que dado un árbol binario devuelven su subárbol izquierdo y derecho respectivamente. *Raiz* es una función que dado un árbol binario devuelve su raíz como un árbol de un único nodo.

$$\begin{array}{lcllcllcl} Izq(\mathbf{null}) & = & \mathbf{null} & Der(\mathbf{null}) & = & \mathbf{null} & Raiz(\mathbf{null}) & = & \mathbf{null} \\ Izq(\langle n, A, B\rangle) & = & A & Der(\langle n, A, B\rangle) & = & B & Raiz(\langle n, A, B\rangle) & = & \langle n, \mathbf{null}, \mathbf{null}\rangle \end{array}$$

3. *Generar* es una función que permite construir un árbol binario a partir de tres árboles dados. Su definición es la siguiente:

$$\begin{array}{lcl} Generar(\mathbf{null}, A, B) & = & \mathbf{null} \\ Generar(\langle n, N_1, N_2\rangle, A, B) & = & \langle n, A, B\rangle \end{array}$$

a. Indique el tipo de similaridad asociado a $\mathcal{M}$.

b. Demuestre que $\mathcal{M} \models (\forall x) f_4(f_3(x), f_1(x), f_2(x)) =' x$.

c. Demuestre o refute que $\mathcal{M} \models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) =' w$.

d. Demuestre que $\not\models (\forall w)(\exists x)(\exists y)(\exists z) f_4(x, y, z) =' w$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Considere la siguiente definición:

$$\varphi := (\exists x)(\forall y)(P(x) \land (P(y) \to x =' y))$$

a. Sean t y t' dos términos tales que $x \notin \mathrm{FV}(t) \cup \mathrm{FV}(t')$. Construya una derivación que demuestre que $\varphi, P(t), P(t') \vdash t =' t'$

b. Demuestre que si $y \notin \mathrm{FV}(t)$ y $P(y) \vdash y =' t$ entonces $P(t) \vdash \varphi$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 1; 1; 1\rangle$, un alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c, y $\mathcal{K} = \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2\}$ con $\mathcal{M}_1 = \langle \{1\}, \{1\}, id, 1\rangle$ y $\mathcal{M}_2 = \langle \{\circ, \bullet\}, \emptyset, F, \bullet\rangle$ donde $F(\circ) = \circ$ y $F(\bullet) = \circ$.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $(\bar{\exists}\mathcal{K}_1 \subseteq \mathcal{K})(\textsc{Cons}(\emptyset) \subseteq Th(\mathcal{K}_1))$

b. $(\bar{\exists}\mathcal{K}_1)(\bot \in Th(\mathcal{K} \cup \mathcal{K}_1))$

c. $(\exists x) c =' f(x) \in Th(\mathcal{K})$

d. $Th(\mathcal{K})$ es consistente maximal