Segundo parcial de Lógica y Lógica modalidad al Revés

3 de julio 2017

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Se considera el lenguaje $\mathcal{L}$ con el tipo de similaridad $\langle 1; 2; 2\rangle$ y un alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y constantes c_1 y c_2.

Se definen las siguientes estructuras:

- $\mathcal{M}_1 = \langle \texttt{PROP}, \{\varphi \mid\ \models \varphi\}, F_{\leftrightarrow}, \bot, \neg\bot\rangle$ donde $F_{\leftrightarrow}$ se define como: $F_{\leftrightarrow}(\varphi, \psi) = (\varphi \leftrightarrow \psi)$
- $\mathcal{M}_2 = \langle \mathbb{N}, \{2 \times n \mid n \in \mathbb{N}\}, +, 3, 2\rangle$

a. Escriba la definición del conjunto $\texttt{TERM}_C$ de los términos cerrados (sin constantes extendidas) de $\mathcal{L}$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si se cumple o no. Justifique su respuesta.

  I. Existe $t \in \texttt{TERM}_C$ tal que $t^{\mathcal{M}_2} = 1$.
  II. Para todo $t \in \texttt{TERM}_C$ y para todo par de valuaciones de $\texttt{PROP}$ v_1 y v_2 se cumple que $v_1(t^{\mathcal{M}_1}) = v_2(t^{\mathcal{M}_1})$.
  III. Existe $t \in \texttt{TERM}_C$ tal que $t^{\mathcal{M}_1}$ es una contingencia.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguientes juicios. En ningún caso son válidas consideraciones semánticas:

a. $\vdash (\forall x) f(f(x)) =' x \to (\forall x)(\exists z)(f(z) =' x \wedge f(x) =' z)$

b. $(\forall x) P(x, f(x)), (\exists y) f(y) =' y \vdash (\exists z) P(f(z), z)$

Ejercicio 3 (15 puntos)

En este ejercicio trabajaremos con el tipo de similaridad $\langle 2; 2; 0\rangle$ y un alfabeto con símbolo de predicado P y símbolo de función f.

Considere las siguientes sentencias:

$$\varphi_1 := (\forall x)P(x,x)$$
$$\varphi_2 := (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \to P(y,x) \to x =' y)$$

que formalizan las nociones de "ser reflexiva" y "ser antisimétrica", y las sentencias

$$\psi_1 := (\forall x)f(x,x) =' x$$
$$\psi_2 := (\forall x)(\forall y)f(x,y) =' f(y,x)$$

que formalizan las nociones de "ser idempotente" y "ser conmutativa". Además, considere la sentencia

$$\sigma := (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x,y) =' x)$$

a. De una estructura $\mathcal{M}$ que modele el conjunto de sentencias $\{\psi_1, \psi_2, \sigma\}$.

b. Pruebe que $\psi_1, \psi_2, \sigma \models \varphi_1$.

c. Sabiendo que $\sigma, \psi_2 \vdash \varphi_2$, indique si las siguientes oraciones son verdaderas o falsas:

  I. $\{\psi_1, \psi_2, \sigma, \varphi_2\}$ tiene modelo.

  II. $\{\psi_1, \psi_2, \sigma, \neg\varphi_2\}$ tiene modelo.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2; 1; 1\rangle$, un alfabeto con símbolo de predicado P, símbolo de función f y símbolo de constante c, y las siguientes definiciones:

$$\begin{array}{lcl@{\qquad}lcl}
\varphi_1 & = & (\forall x)(\forall y)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y) & T_1 & = & \textsc{Cons}(\{\varphi_1\}) \\
\varphi_2 & = & (\forall y)\neg P(c,y) & T_2 & = & Th(Mod(\{\varphi_1, \varphi_2\})) \\
\varphi_3 & = & (\exists x)P(x,x) & \mathcal{M}_1 & = & \langle\{\bullet\}, \{(\bullet,\bullet)\}, Id, \bullet\rangle
\end{array}$$

donde Id es la función identidad.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. T_1 es consistente.

b. $\varphi_3 \in T_1$

c. $\varphi_3 \in T_2$

d. $\textsc{Cons}(T_1 \cup T_2)$ es consistente maximal

e. $Th(\{\mathcal{M}_1\})$ es consistente maximal