Segundo parcial de Lógica

8 de julio 2015

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea $\mathcal{L}$ un lenguaje de primer orden con igualdad con tipo de similaridad $\langle -; 1, 1; 1\rangle$, con símbolos de función: f y g y símbolo de constante c.

Considere la estructura $\mathcal{M} = \langle \mathbb{N}, +1, +2, 0\rangle$, donde $+1$ es la función que suma uno y $+2$ es la función que suma dos.

a. Sean los conjuntos: $A = \{0, 4\}$ y $B = \{2, 6\}$

   Dé $s_1, s_2, s_3, s_4 \in \mathtt{TERM}$ tales que: $A = \{s_1^{\mathcal{M}}, s_2^{\mathcal{M}}\}$, $B = \{s_3^{\mathcal{M}}, s_4^{\mathcal{M}}\}$. Justifique su respuesta.

b. I. Defina inductivamente, **sin usar el símbolo** f, el lenguaje infinito $T_1 \subseteq \mathtt{TERM}$ tal que las interpretaciones de los elementos de T_1 en $\mathcal{M}$ son múltipos de 4 (por ejemplo 8,12).

   II. Demuestre que el lenguaje T_1 cumple la propiedad solicitada.

c. Defina inductivamente, **sin usar el símbolo** f, el lenguaje infinito $T_2 \subseteq \mathtt{TERM}$ tal que las interpretaciones de los elementos de T_2 en $\mathcal{M}$ son múltipos de 4 más 2 (por ejemplo 10,14).

   No es necesario demostrar que T_2 cumple la propiedad solicitada.

d. Pruebe que $(\bar{\forall} t_1 \in T_1)(\bar{\forall} t_2 \in T_2) t_1 \neq t_2$

e. Demuestre que la siguiente afirmación es falsa:

$$(\bar{\forall} t \in \mathtt{TERM})\text{si } t^{\mathcal{M}} \text{ es par entonces } t \in T_1 \cup T_2$$

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere el lenguaje de primer orden con igualdad definido por el tipo de similaridad $\langle 1, 1; -; 0\rangle$, con símbolos de predicados P y Q y una estructura $\mathcal{M}$ de este tipo.

a. I. Pruebe que $\mathcal{M} \models (\forall y)P(y) \Leftrightarrow \mathcal{M} \models P(x)$

   II. Pruebe que $\not\models P(x) \to (\forall y)P(y)$

b. Dé $\mathcal{M}_1$ tal que $\mathcal{M}_1 \not\models (\exists y)(P(y) \wedge \neg x{=}'y) \to (\forall x)P(x)$. Justifique su respuesta.

c. Demuestre usando equivalentes (y sin usar el lema 2.4.5) que:

   $\models ((\exists x)P(z) \vee \neg Q(y)) \leftrightarrow \neg(\forall x)(\neg P(z) \wedge Q(y))$

Ejercicio 3 (15 puntos)

Construya derivaciones que prueben los siguiente juicios.

a. $(\forall z)(P(x,z) \wedge P(y,z) \to P(f(x,y),z))$,
$P(x, f(y,x)), P(y, f(y,x)) \vdash P(f(x,y), f(y,x))$

b. $\vdash (\exists x)(\exists y)(\forall w)P(f(x,y),w) \to (\exists x)(\forall w)P(x,w)$

c. $(\forall x)(\forall y)P(y, f(x,y)) \vdash (\forall y)(\forall x)P(x, f(y,x))$

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}_1$, con tipo de similaridad $\langle 1; -; 0\rangle$. Sea $\mathtt{SENT}_1$ el conjunto de todas las fórmulas cerradas en $\mathcal{L}_1$.

a. Dé $\varphi \in \mathtt{SENT}_1$ tal que $\not\models \varphi$ y $\not\models \neg\varphi$. Justifique su respuesta.

b. Dé $\Gamma \subseteq \mathtt{SENT}_1$, teoría consistente y $\varphi \in \Gamma$, siendo φ la definida en la parte a. Justifique su respuesta.

c. Dé $\Delta \subseteq \mathtt{SENT}_1$, teoría consistente y $Mod(\Delta) \cap Mod(\Gamma) = \emptyset$. Justifique su respuesta.

d. Considere ahora un lenguaje de primer orden con igualdad $\mathcal{L}_2$, con tipo de similaridad $\langle 1; -; 1\rangle$. Sea $\mathtt{SENT}_2$ el conjunto de todas las fórmulas cerradas en L_2.

   Demuestre que hay una fórmula ψ lógicamente válida en $SENT_2$ tal que $\psi \notin \Gamma$.