Segundo parcial de Lógica

08 de Julio de 2013

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (15 puntos)

Sea $\Sigma = \{0, 1\}$ y la siguiente estructura $A = \langle \Sigma^*, R, F, \varepsilon, 11 \rangle$ donde:

- $R \subseteq \Sigma^* \times \Sigma^*$,

  $R = \{(\alpha, \beta) / Cant1(\alpha) \geq Cant1(\beta)\}$

  La función $Cant1$ cuenta las ocurrencias de símbolos 1 en su argumento. Por ejemplo $Cant1(1011) = 3$.

- $$\begin{aligned} &F : \Sigma^* \to \Sigma^* \\ &F(\varepsilon) \quad := \varepsilon \\ &F(x\alpha) := 1F(\alpha) \end{aligned}$$

a. Determine el tipo de similaridad de la estructura A. Justifique su respuesta.

b. Defina un lenguaje de primer orden con igualdad L del tipo de similaridad dado en **a**.

   Incluya la definición del alfabeto (Σ_L), el conjunto de los términos ($TERM_L$) y el lenguaje en si mismo.

c. Demostrar la siguiente propiedad:

$$(\bar{\forall} t \in TERM_{C_L})(F(t^A) = t^A)$$

   Donde $TERM_{C_L}$ es el conjunto de los términos cerrados de L sin constantes extendidas.

d. Defina $\varphi \in L$ tal que interpretada en A es:

   El resultado de aplicar F a cualquier elemento de Σ^* tiene al menos la misma cantidad de símbolos 1 que su argumento.

   Justifique su respuesta.

Ejercicio 2 (15 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden del tipo $\langle 1; 1; 0\rangle$ y las siguentes fórmulas

- $\varphi_1 := P(f(x)) \wedge (\exists y)\neg P(y)$.
- $\varphi_2 := (\exists x)(\forall y)x =' y \rightarrow (\forall x)x =' f(x)$.

a. Para cada caso propocione una estructura M_i en caso que exista. Justifique su respuesta.
   I. $M_1 \models \varphi_1$.
   II. $M_2 \models \varphi_2$.
   III. $M_3 \not\models \varphi_2$.

b. Demuestre o refute las siguientes afirmaciones.
   I. $\models (\forall x)(P(f(x) \wedge (\exists y)\neg P(y)) \vee ((\exists x)(\forall y)x =' y \rightarrow (\forall x)x =' f(x))$.
   II. $\overline{\exists}\psi \in$ SENT tal que ψ no es subfórmula de φ_1, φ_1 no es subfórmula de ψ y $\psi \models \varphi_1$.

Ejercicio 3 (15 puntos)

Considere $\Gamma = \{(\forall x)P(f(x)), (\forall x)(\neg x =' c_0 \rightarrow \neg P(x))\}$.

a. Construya una derivación que demuestre que $\Gamma \vdash (\forall x)f(x) =' c_0$

b. Construya una derivación que demuestre que $(\forall x)f(x) =' c_0 \vdash \neg(\exists x)(\exists y)(\neg f(x) =' f(y))$

c. Demuestre que $\Gamma \vdash \neg(\exists x)(\exists y)(\neg f(x) =' f(y))$

Nota: En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (15 puntos)

Considere el tipo de similaridad $\langle 2; 1; 0\rangle$, el lenguaje $\mathcal{L}$ de primer orden correspondiente, y las sentencias $\varphi = (\exists x)(\exists y)(P(x,y) \rightarrow P(f(x), f(y)))$ y $\psi = (\forall x)(\forall y)\neg P(f(x), f(y))$ de ese lenguaje. Diga si las siguientes afirmaciones son ciertas. En cada caso justifique su respuesta.

a. $\{\varphi\}$ es consistente

b. $\{\varphi, \psi\}$ es consistente

c. $Th(Mod(\{\varphi, \psi\})) \subseteq Th(Mod(\{\varphi\}))$