Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica

Segundo Parcial
Julio 2007

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **3** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60** puntos.
- ***Toda respuesta debe estar fundamentada.*** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- ***Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas***.

Atención:
Cada ejercicio está antecedido por una pregunta obligatoria marcada con un asterisco (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

EJERCICIO 1 (20 puntos)

Pregunta * Dé la definición de $\mathcal{M} \models \forall x\ \varphi$ (i.e. $\mathcal{M}$ es modelo de $\forall x\ \varphi$).

Considere un lenguaje de primer orden del tipo <-;1,1; 1> con símbolos de función f y g y un símbolo de constante $\underline{c}$.
Considere la estructura $\mathcal{M}$ = < N, Suc, Pred, 0> tal que

$$\begin{array}{ll} \text{Suc: } N \to N & \text{Pred: } N \to N \\ \text{Suc } (n) = n+1 & \text{Pred } (n) = 0 \text{ si } n=0 \\ & \qquad\qquad = (n-1) \text{ si } n \neq 0 \end{array}$$

1. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si la afirmación es correcta o no. De ser correcta haga la demostración sobre $TERM_C$ (Términos Cerrados), de lo contrario dé un contraejemplo.

   a. Para todo $t \in TERM_C$, se cumple $\mathcal{M} \models f(g(t)) =' t$.
   b. Para todo $t \in TERM_C$, se cumple $\mathcal{M} \models g(f(t)) =' t$.

2. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si la afirmación es correcta o no. De ser correcta haga la demostración de lo contrario dé un contraejemplo.

   a. $M \models \forall x\ f(g(x)) =' x$
   b. $M \models \forall x\ g(f(x)) =' x$

EJERCICIO 2 (10 puntos)

Pregunta * Sea L un lenguaje de primer orden y sea $\varphi \in L$. Dé la definición de $\models \varphi$ (i.e. fórmula lógicamente válida).

Considere un lenguaje L de primer orden y tipo $<2; 2; 1>$ con símbolo de predicados P, símbolo de función *f* y símbolo de constante $\underline{c}$. Considere las siguientes estructuras:

$A = <Q, <, -, 1>$
$B = <Z, <, -, 1>$

1. Encuentre una fórmula $\varphi \in L$ tal que $A \models \varphi$ y $B \not\models \varphi$ y justifique su respuesta.
2. Encuentre una fórmula $\psi \in L$ tal que $\not\models \psi$ y sin embargo $A \models \psi$ y $B \models \psi$. Justifique su respuesta.

EJERCICIO 3 (15 puntos)

Pregunta * Enuncie las reglas de derivación correspondientes a la introducción y eliminación del $\forall$.

Considere un lenguaje L de primer orden con tipo $< 2 ; 1; 1>$ con símbolo de predicados P, símbolo de función S y símbolo de constante $\underline{0}$.

Considere el siguiente conjunto de axiomas:

$\Gamma = \{ \forall x \neg(\underline{0} =' S(x)),$
$\quad \forall x \forall y (P(x, y) \to \underline{0} =' x \vee \exists w (y =' S(w)) \}$

Construya una derivación de $\Gamma \vdash \neg P(S(\underline{0}), \underline{0})$.

EJERCICIO 4 (15 puntos)

Pregunta * Sean $\Gamma \subseteq SENT$. Dé la definición de Γ consistente.

Notación: para una clase de estructuras *K* con tipo adecuado y un conjunto de sentencias Γ, escribimos $K \models \Gamma$, para indicar

Para toda $M \in K$, $M \models \Gamma$

1. Sea $\Delta \subseteq SENT$ conocido. Encuentre algún $\Gamma \subseteq SENT$ no vacío tal que para toda estructura $M \in Mod(\Delta)$ se cumpla que $M \models \Gamma$.
2. Encuentre algún $\Gamma \subseteq SENT$ no vacío tal que para cualesquiera conjuntos $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq SENT$ se cumpla que $Th(Mod(\Delta_1)) \vdash \Gamma$ y $Th(Mod(\Delta_2)) \vdash \Gamma$.
3. Sean $\Delta_1, \Delta_2 \subseteq SENT$, y defina $\Gamma = \Delta_1 \cap \Delta_2$. Pruebe que $Th(Mod(\Delta_1)) \vdash \Gamma$ y $Th(Mod(\Delta_2)) \vdash \Gamma$.