Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica

Segundo Parcial

Julio 2005

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención : Cada ejercicio está antecedido por una **pregunta obligatoria** marcada con una estrella (*****), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

Ejercicio 1 (12 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad $< - ; 1,2 ; 2 >$.

Pregunta (*****) Defina inductivamente el conjunto TERM de los términos pertenecientes a dicho lenguaje.

(a) Defina por recursión primitiva una función G: TERM $\rightarrow$ TERM_C la cual, dado $t \in$ TERM, reemplaza en t todas las ocurrencias de términos atómicos (variables y constantes) por c_1.

Ejemplo: $G(f_2(f_1(x), f_2(y, c_2))) = f_2(f_1(c_1), f_2(c_1, c_1))$

(b) Sea $\mathcal{M} = < \mathbb{N}, {}^2, *, 1, 2 >$ una estructura de tipo $< - ; 1,2 ; 2 >$ donde N es el conjunto de los números naturales, ^{2} es la función cuadrado y * es la función producto. Demuestre por inducción que para todo $t \in$ TERM se cumple que $\mathcal{M} \models (G(t) =' c_1)$.

Ejercicio 2 (16 puntos)

Sea $\mathcal{H} = < \{a, b, c, d\}, \Theta_1, \Theta_2, \bullet , a, d >$ una estructura donde Θ_1 y Θ_2 son relaciones y $\bullet$ es una función las cuales están explicitadas en los cuadros que siguen:

Θ_1	a	b	c	d
a		√		√
b				√
c	√	√	√	√
d				

Θ_2	a	b	c	d
a			√	
b				√
c	√			
d				

$\bullet$	a	b	c	d
a	a	b	c	d
b	c	d	a	b
c	b	a	d	c
d	d	c	b	a

<u>Por ejemplo</u>: Θ_1(a,b) se cumple, Θ_1(b,a) no se cumple, a • b = b, b • a = c

Pregunta (*) Escriba el tipo de similaridad asociado a la estructura H.

(a) Escriba dos términos distintos t_1 y t_2 tales que $t_1^{H} = a$ y $t_2^{H} = a$.

(b) ¿Es cierto que $H \models P_1(f_1(x,y), c_1) \rightarrow P_2(x,y)$? Justifique.

(c) ¿Es cierto que $H \models (P_1(x,y) \leftrightarrow P_1(y,x)) \wedge \neg(x =' y) \rightarrow P_2(x,y)$? Justifique.

Ejercicio 3 (16 puntos)

Considere un lenguaje de primer orden con tipo de similaridad < 1,2 ; 1 ; 1 >.

Pregunta (*) Indique porqué la regla ($\forall_E$) está mal aplicada en la siguiente derivación:

$$\frac{\forall x\ (P_1(x) \rightarrow \exists y P_1(x))}{P_1(y) \rightarrow \exists y P_1(y)}\ (\forall\ E)$$

(a) Construya una derivación de:

$$\forall x \forall z\ (P_1(z) \rightarrow P_2(z,x)),\ \forall x\ P_1(f_1(x)) \ \vdash \forall y\ P_2(f_1(y), c_1)$$

(b) Sean α, β fórmulas cualesquiera de FORM. Construya una derivación de:

$$\exists x\ (\neg\beta \rightarrow \alpha) \ \vdash\ \forall x(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \exists x \beta$$

En este ejercicio se le solicitan **derivaciones**. Todo paso de las mismas debe estar justificado con el nombre de la regla empleada y en caso de que la regla lo exija, se deben explicitar las restricciones correspondientes para las variables. En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (16 puntos)

Considere la estructura S = < U, R > con $R \subseteq U$xU y tipo de similaridad < 2 ; – ; 0 >.

Pregunta (*) Escriba una sentencia σ de primer orden que afirme que "*R es simétrica*"

Definimos $\delta \equiv \forall x \exists y (P_1(x,y) \wedge P_1(y,x))$

(a)
1. Pruebe que cualquier estructura de tipo < 2 ; – ; 0 > cuya relación sea la identidad es modelo de $(\delta \wedge \sigma)$.
2. Presente una estructura de tipo < 2 ; – ; 0 > con universo finito que sea modelo de $(\delta \wedge \sigma)$, y cuya relación **no** sea la identidad. Justifique.

(b) Para cada una de las siguientes afirmaciones, indique si es cierta o no. En caso afirmativo, demuéstrela y en caso negativo, presente un contraejemplo y justifique.

1. $Mod\ (\sigma) \subseteq Mod\ (\delta)$
2. $Mod\ (\delta \leftrightarrow \sigma) \subseteq Mod\ (\delta)$
3. $Mod\ (\delta) \subseteq Mod\ (\sigma)$