Instituto de Computación **Facultad de Ingeniería**

Lógica
Segundo Parcial
Julio 1999

Indicaciones Generales
- La duración del parcial es de **tres horas y media**.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **60 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Problemas

Ejercicio 1. (15 ptos.)

Considere las siguientes estructuras de tipo de similaridad $< 1, 1; -; 0 >$:

$\mathcal{A} =< N, \{n \in N \mid n\ es\ impar\},\ \{n \in N \mid n\ es\ par\ y\ n \leq 10\} >$

$\mathcal{B} =< N, \{n \in N \mid n\ es\ par\},\ \{n \in N \mid n\ es\ primo\} >$

(a) Defina los símbolos del alfabeto para un lenguaje del tipo $< 1, 1; -; 0 >$ y dé una sentencia φ de dicho lenguaje tal que $\mathcal{A} \models \varphi$ y $\mathcal{B} \models \neg\varphi$.

(b) Dé una sentencia ψ tal que $\mathcal{A} \models \psi$ y $\mathcal{B} \models \psi$.

(c) Considere las sentencias ψ y φ de las partes anteriores. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas.

(I) $\{\varphi \wedge \psi\}$ es consistente.

(II) Para toda fórmula σ, si $\varphi \wedge \psi \vdash \sigma$ entonces $\vdash \sigma$.

Ejercicio 2. (15 ptos.)

Sean φ y ψ fórmulas de un lenguaje de primer orden tales que $FV(\varphi) = FV(\psi) = \{x\}$. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa.

(a) $\models \forall x(\varphi \wedge \psi) \rightarrow (\forall x \varphi \rightarrow \forall x \psi)$

(b) $\models \forall x(\varphi \vee \psi) \rightarrow (\exists x \varphi \rightarrow \exists x \psi)$

(c) Si σ es una sentencia, entonces $\forall x \sigma\ eq\ \sigma$

Ejercicio 3. (14 ptos.)

Sean φ y ψ fórmulas en las que la variable z no ocurre. Construya una derivación de[1]: $\exists x \varphi(x) \wedge \exists x \psi(x) \vdash \exists x \forall z(\varphi(x) \vee \psi(z))$ y justifique cuando corresponda que las restricciones de las reglas se cumplen.

Ejercicio 4. (16 ptos.)

Considere la siguiente definición del operador $CONS$:

$$CONS(\Gamma) = \{\varphi \in SENT \mid \Gamma \vdash \varphi\}.$$

Demuestre las siguientes afirmaciones:

(a) $CONS(CONS(\Delta)) = CONS(\Delta)$ para todo conjunto de sentencias Δ.

(b) Sean $\Gamma, \Delta \subseteq SENT$ tales que:

$$\Gamma \subseteq CONS(\Delta)$$
$$\Delta \subseteq CONS(\Gamma)$$

Demuestre que $CONS(\Gamma) = CONS(\Delta)$.

(c) Si $\Delta \subseteq SENT$ es una teoría entonces $CONS(\Delta) = \Delta$.

[1]Observe que expresado en notación formal lo que se pide demostrar es $\exists x \varphi \wedge \exists x \psi \vdash \exists x \forall z(\varphi \vee \psi[z/x])$.