# Primer parcial de Lógica

**28 de abril de 2025**

**Indicaciones generales**

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

## Ejercicio 1 (12 puntos)

Considere un alfabeto $\Sigma = \{0, 1\}$ y la definición usual de $\Sigma^*$.

a. Defina la función $suma : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ que devuelve la suma de los elementos de una tira. Por ejemplo:
   - $suma(010110) = 3$
   - $suma(0000) = 0$

b. Defina la función $largo : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ que cuenta los símbolos de una tira. Por ejemplo:
   - $largo(0) = 1$
   - $largo(110001) = 6$

c. Defina la función $unos : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ que dado un natural $n$ devuelve la tira de largo $n$ que contiene solo unos. Por ejemplo:
   - $unos(4) = 1111$
   - $unos(1) = 1$
   - $unos(0) = \varepsilon$

d. Defina inductivamente al lenguaje $\mathcal{L} \subseteq \Sigma^*$ de las tiras que contienen únicamente al par 01 una o más veces de forma consecutiva. Por ejemplo:
   - $01 \in \mathcal{L}$
   - $0101 \in \mathcal{L}$
   - $010101 \in \mathcal{L}$
   - $\varepsilon \notin \mathcal{L}$

e. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall} w \in \mathcal{L})(suma(w) < suma(unos(largo(w))))$

# Ejercicio 2 (12 puntos)

Recuerde que para cualquier fórmula $\varphi$, su conjunto característico se define como: $\|\varphi\| = \{v \in V / v(\varphi) = 1\}$, siendo $V$ el conjunto de todas las valuaciones.

a. Dadas $\alpha$ y $\beta$ dos fórmulas arbitrarias de `PROP`, dé una fórmula $\varphi \in$ `PROP` tal que $\|\varphi\| = \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$. Justifique su respuesta.

b. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo $\alpha$ y $\beta$ fórmulas de `PROP`, justificando adecuadamente en cada caso:

   I. $v(\alpha \wedge \beta) = 1 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$

   II. $v(\alpha \vee \beta) = 0 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$

   III. $v(\alpha \wedge \beta) = 0 \Rightarrow v \in \|\alpha\|^c \cup \|\beta\|$

# Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $(\alpha \wedge \beta) \rightarrow (\alpha \wedge \gamma), (\alpha \vee \beta) \rightarrow (\alpha \vee \gamma) \vdash \beta \rightarrow \gamma$

b. $\vdash (\neg\beta \rightarrow \neg\alpha) \leftrightarrow (\neg\alpha \vee \beta)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

# Ejercicio 4 (6 puntos)

Considere el siguiente conjunto:

$$\Gamma = \{(p_0 \vee p_1) \wedge p_i : i \in \mathbb{N}, i \geq 2\}$$

a. Determine si $\Gamma$ es consistente. Justifique.

b. Dé una fórmula $\varphi \in$ `PROP` tal que $\Gamma \cup \{\varphi\}$ sea completo. Justifique.

Se recuerda que la caracterización semántica de completo dice que un conjunto $\Delta \subseteq$ `PROP` es completo si y sólo si existe una única valuación $v$ tal que $v(\Delta) = 1$.