Primer parcial de Lógica

04 de mayo de 2024

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Dar una definición *inductiva libre* del conjunto $\texttt{PROP}_{\wedge,\neg}$ de las fórmulas de $\texttt{PROP}$ que solamente usan los conectivos $\wedge$ y $\neg$.

b. I. Defina la función $sub : \texttt{PROP}_{\wedge,\neg} \to 2^{\texttt{PROP}_{\wedge,\neg}}$ que devuelve el conjunto de subfórmulas de una proposición.

II. Demuestre por inducción que $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_{\wedge,\neg})(\bar{\exists}n \in \mathbb{N})(|sub(\varphi)| \leq n)$.

c. I. Defina la función $f : \mathbb{N} \to \texttt{PROP}_{\wedge,\neg}$ que dado un número natural n, devuelva p_0 negado n veces.

Ejemplos:

- $f(1) = (\neg p_0)$.
- $f(3) = (\neg(\neg(\neg p_0)))$.

II. Demuestre que para todo número natural n se cumple que $|sub(f(n))| = n + 1$.

Nota: Puede asumir que para toda fórmula α de $\texttt{PROP}$ se cumple que $(\neg\alpha) \notin sub(\alpha)$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Dadas dos fórmulas de $\texttt{PROP}$, φ y ψ, se dice que están relacionadas y se denota como $\varphi \bowtie \psi$:

$\varphi \bowtie \psi \Leftrightarrow \|\varphi\| \cap \|\psi\| = \emptyset$

Recordar: $\|\varphi\| = \{v \in V / v(\varphi) = 1\}$ siendo V el conjunto de todas las valuaciones.

a. Determine si $\alpha \bowtie \beta$ siendo:

$$\alpha = \neg(p \wedge \neg q) \to r$$

$$\beta = \neg r \vee \neg(q \leftrightarrow p)$$

b. Para cada una de las siguientes afirmaciones indique si son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta.

I. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})$
(Si $\varphi \bowtie \psi$ y $(\bar{\exists}v : val)v(\varphi) = 1$, entonces $(\bar{\exists}v : val)v(\psi) = 0$)

II. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\perp \bowtie \varphi)$

III. $(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\not\models \neg\varphi$ y $\neg\perp \bowtie \varphi)$

IV. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})$ $(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})$ Si φ $\texttt{eq}$ ψ y $\varphi \bowtie \psi$ entonces $\models \neg\varphi$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash ((\neg\alpha \vee \neg\beta) \wedge (\alpha \vee \beta)) \to (\neg\alpha \leftrightarrow \beta)$
b. $(\alpha \to \beta) \to \alpha, \neg\beta \vdash (\alpha \wedge \neg\beta) \vee \alpha$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere dos conjuntos consistenes maximales Γ y Δ tales que $\Gamma \neq \Delta$. Pruebe las siguientes afirmaciones:

a. $\textsc{Cons}(\Gamma \cup \Delta) = \texttt{PROP}$
b. $\Gamma \cap \Delta$ es Teoría.
c. $\Gamma - \Delta$ no es vacío.
d. $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\psi \in \texttt{PROP})\ (\varphi \notin \Gamma \text{ y } \psi \in \Delta \Rightarrow (\varphi \to \psi) \in \Gamma \cap \Delta)$