

# Primer parcial de Lógica

22 de abril de 2023

## Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

## Ejercicio 1 (12 puntos)

Considere un alfabeto  $\Sigma = \{0, 1\}$  y la definición usual de  $\Sigma^*$ .

- a. Defina la función  $suma : \Sigma^* \rightarrow \mathbb{N}$  que devuelve la suma de los elementos de la tira de  $\Sigma^*$ .  
Por ejemplo:

$$\begin{aligned} suma(101) &= 2 \\ suma(0001) &= 1 \\ suma(\varepsilon) &= 0 \end{aligned}$$

- b. Defina la función  $largo$  que cuenta los símbolos de una tira
- c. Defina inductivamente a  $\mathcal{L}_1 \subseteq \Sigma^*$  que contiene a las tiras que terminan en 0.
- d. Demuestre por inducción que  $(\forall w \in \mathcal{L}_1)(suma(w) < largo(w))$
- e. Defina la función  $f : \mathcal{L}_1 \rightarrow \Sigma^*$  que cambia los 0 por 1 y los 1 por 0 cada símbolo de una tira. Por ejemplo:

$$\begin{aligned} f(10) &= 01 \\ f(100) &= 011 \end{aligned}$$

- f. Demuestre que  $(\forall w \in \mathcal{L}_1)(suma(f(w)) < largo(f(w)))$  no se cumple.

## Ejercicio 2 (12 puntos)

a. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas para todo  $\alpha, \beta$  y  $\gamma$  fórmulas de PROP. Justifique su respuesta.

- I.  $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \models \alpha \wedge \neg\beta$
- II. Si  $\models \alpha \wedge \beta$  y  $\alpha, \beta \models \gamma$  entonces  $\models \gamma$
- III. Si  $\alpha$  es equivalente a  $\beta \rightarrow \gamma$  entonces  $\models \alpha \vee \neg\gamma$

b. Dé  $\alpha$  y  $\beta$  fórmulas de PROP tales que cumple simultáneamente las siguientes condiciones:

- $\alpha$  y  $\beta$  son contingencias.
- $\not\models \alpha \leftrightarrow \beta$
- $\alpha \models \beta$

Justifique la respuesta.

## Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

- a.  $\alpha \rightarrow (\neg\beta \vee \gamma) \vdash \neg(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow \neg\alpha$
- b.  $\vdash (\alpha \leftrightarrow \neg\beta) \rightarrow (\neg(\alpha \wedge \beta) \wedge (\alpha \vee \beta))$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

## Ejercicio 4 (6 puntos)

- a. Demuestre que para todo  $\Gamma \subseteq \text{PROP}$  consistente y para toda tautología  $\alpha$  se cumple que  $\Gamma \cup \{\alpha\}$  es consistente.
- b. Demuestre que para todo  $\Delta \subseteq \text{PROP}$  consistente maximal se cumple:
  - I. Existe una contingencia  $\alpha$  tal que  $\Delta \cup \{\alpha\}$  es inconsistente.
  - II. Para toda  $\alpha \in \text{PROP}$ : si  $\Delta \vdash \alpha$  entonces  $\alpha \in \Delta$ .