Primer parcial de Lógica

4 de mayo 2022

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere un nuevo conectivo binario $\lhd$. Sea $\mathcal{K} = \{\lhd, \neg\}$.

a. Dar una definición *inductiva libre* del conjunto $\mathtt{PROP}_\mathcal{K}$ de las fórmulas de $\mathtt{PROP}$ que solamente usan los conectivos de $\mathcal{K}$.

   Ejemplos:

   - p_1, $(\neg p_3)$, $(p_1 \lhd p_2)$, $(p_1 \lhd (\neg p_2))$ y $((\neg(p_1 \lhd p_2)) \lhd p_4)$ pertenecen a $\mathtt{PROP}_\mathcal{K}$.
   - $\bot$, $(p_1 \vee p_2)$ y $((p_1 \lhd (\neg p_2)) \rightarrow p_2)$ no pertenecen a $\mathtt{PROP}_\mathcal{K}$.

b. I. Definir una función $G : \mathtt{PROP}_\mathcal{K} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:

   $G(\alpha) = 1$ sii en α aparece al menos un símbolo de negación en cualquier parte de la fórmula.

   Ejemplos:
   $G(p_i) = G((p_i \lhd p_2)) = 0$,
   $G((\neg p_i)) = G(((\neg p_i) \lhd p_2)) = G(((\neg p_i) \lhd (\neg p_2))) = G(((\neg(\neg p_5)) \lhd (\neg p_2))) = 1$.

   II. Definir una función $F : \mathtt{PROP}_\mathcal{K} \rightarrow \{0, 1\}$ tal que:

   $F(\alpha) = 1$ sii en α aparecen al menos **dos** símbolos de negación en cualquier parte de la fórmula.

   Ejemplos:
   $F(p_3) = F((p_2 \lhd p_2)) = F((\neg p_1)) = F(((\neg p_1) \lhd p_2)) = 0$
   $F((\neg(\neg p_3))) = F(((\neg p_2) \lhd (\neg p_2))) = F(((\neg(\neg p_1)) \lhd (\neg p_2))) = F((p_1 \lhd (\neg(\neg p_2)))) = 1$

c. Se considera la semántica del conectivo $\lhd$ dada por la siguiente regla:

   Para toda valuación v: $v((\alpha \lhd \beta)) = v(\alpha)$

   Demostrar que para toda fórmula $\alpha \in \mathtt{PROP}_\mathcal{K}$ existe una letra proposicional p_i tal que α $\mathtt{eq}$ p_i o α $\mathtt{eq}$ $\neg p_i$.

d. ¿El conjunto de conectivos $\{\lhd, \neg\}$ es *funcionalmene completo*?. Fundamente su respuesta.

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Demuestre las siguientes afirmaciones. Justifique sin utilizar corrección y completitud.

   I. $\models ((\alpha \to \beta) \land \neg\alpha) \lor \alpha$
   II. $\models \alpha \land \neg\beta \to \alpha$

b. Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   I. $(\bar{\exists}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})\, \Gamma \models \alpha$
   II. $(\bar{\exists}\alpha \in \texttt{PROP})(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})\, \Gamma \models \alpha$
   III. $(\bar{\exists}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})\, \Gamma \not\models \alpha$
   IV. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \texttt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP})\, \Gamma \models \neg\alpha$

Ejercicio 3 (10 puntos)

a. Pruebe que si $\varphi \vdash \beta$ entonces $\neg\psi \vdash \varphi \lor \psi \to \beta$
b. Construya una derivación que pruebe el siguiente juicio: $\vdash \neg(\varphi \leftrightarrow \psi) \to (\varphi \lor \psi) \land \neg(\varphi \land \psi)$

Nota: En este ejercicio no se aceptan consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere los siguientes conjuntos:

$C_\perp$**:** El conjunto de todas las contradicciones.

C_T**:** El conjunto de todos los teoremas.

Γ**:** Un conjunto consistente maximal.

Γ^C**:** El complemento de Γ

Δ**:** $\Gamma^C - C_\perp$ Es el complemento de Γ de donde se eliminaron todas las contradicciones.

a. Pruebe que Γ^C es inconsistente.
b. Pruebe que $\Gamma - C_T$ es consistente.
c. Pruebe que Δ sólo contiene contingencias.
d. Pruebe Δ no es una teoría.
e. Suponga que $p_1 \notin \Gamma$

   I. Pruebe que $(p_1 \land p_2) \in \Delta$ y $(p_1 \land \neg p_2) \in \Delta$
   II. Concluya que Δ es inconsistente.