Primer parcial de Lógica

06 de mayo de 2021

Indicaciones generales

- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en el teórico y en el práctico del mismo. En esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Dar una definición inductiva del conjunto $\texttt{PROP'}$ subconjunto de $\texttt{PROP}$ que tiene únicamente las fórmulas de $\texttt{PROP}$ que se pueden construir usando los conectivos $\{\neg, \to\}$.

Ejemplos:

- $(\neg(p_0 \to (\neg p_1))) \in \texttt{PROP'}$
- $(p_0 \to \bot) \notin \texttt{PROP'}$

b. Defina siguiendo el ERP para $\texttt{PROP'}$ una función $f : \texttt{PROP'} \times P \to \{0, 1\}$, donde P es el conjunto de todas las letras proposicionales, que indica si la letra proposicional ocurre en la fórmula.

Ejemplos:

- $f((\neg p_0), p_0) = 1$
- $f((\neg p_0), p_1) = 0$
- $f(((\neg(p_0 \to p_0)) \to p_2), p_2) = 1$
- $f(((\neg(p_0 \to p_0)) \to p_2), p_0) = 1$

c. Dada $\beta_1 \in \texttt{PROP'}$ que cumple $f(\beta_1, p_0) = 0$ demostrar usando el PIP que corresponde que:

$$(\bar{\forall}\alpha \in \texttt{PROP'}) f(\alpha[\beta_1/p_0], p_0) = 0$$

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Indique cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles no. Justifique sus respuestas.

   I. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \mathtt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{PROP})(\bar{\forall}\beta \in \mathtt{PROP})(\Gamma \models (\alpha \land \beta) \Rightarrow \Gamma \models \alpha \text{ y } \Gamma \models \beta)$
   II. $(\bar{\forall}\Gamma \subseteq \mathtt{PROP})(\bar{\forall}\alpha \in \mathtt{PROP})(\bar{\forall}\beta \in \mathtt{PROP})(\Gamma \models (\alpha \lor \beta) \Rightarrow \Gamma \models \alpha \text{ o } \Gamma \models \beta)$

b. Sean $\Gamma \subseteq \mathtt{PROP}$ y $\varphi \in \mathtt{PROP}$. Se dice que φ es **independiente** de Γ si $\Gamma \not\models \varphi$ y $\Gamma \not\models \neg\varphi$.

   Consideramos:

   - $\Delta = \{p_1 \to (p_2 \land \neg p_3), \neg(p_3 \leftrightarrow p_2)\}$

   Indique cuáles de las siguientes proposiciones son independientes de Δ y cuáles no. Justifique sus respuestas.

   I. $\neg p_3$
   II. $\neg p_1 \lor (p_2 \land \neg p_3)$
   III. $\neg(p_1 \to p_1)$

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $\neg(\neg(\alpha \to \beta) \lor \neg(\neg\beta \lor \alpha)) \vdash \alpha \leftrightarrow \beta$
b. $\vdash (\alpha \land \beta) \leftrightarrow \neg(\alpha \to (\beta \to \bot))$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere el siguiente conjunto $\Gamma = \{p_0\} \cup \{\neg(p_i \land p_{i+1}) : i \in \mathbb{N}\}$

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas, justificando cada respuesta:

a. Γ es consistente
b. Γ es completo
c. Γ es teoría
d. Γ es consistente maximal
e. Existe Δ_1 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_1$ y Δ_1 es completo
f. Existe Δ_2 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_2$ y Δ_2 es teoría
g. Existe Δ_3 tal que $\Gamma \subseteq \Delta_3$ y Δ_3 es consistente maximal