Primer parcial de Lógica

29 de abril 2019

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (12 puntos)

a. I. Dar una definición inductiva del conjunto $\mathcal{A}$ de todas las fórmulas de `PROP` que se pueden construir usando los conectivos $\{\neg, \wedge\}$ y que cumplan las siguientes condiciones:

- Las letras proposicionales sólo aparecen negadas.
- No aparecen otras negaciones que las que afectan a las letras proposicionales.

Ejemplos: $\neg p_5, (\neg p_0 \wedge \neg p_3), ((\neg p_3 \wedge \neg p_8) \wedge (\neg p_3 \wedge \neg p_2)), (\neg p_1 \wedge (\neg p_1 \wedge \neg p_9)),$ $((\neg p_1 \wedge \neg p_1) \wedge \neg p_9)$

II. Definir de acuerdo con el ERP, una función: $f : \mathcal{A} \to$ `PROP` de tal forma que $f(\alpha)$ sea el resultado de cambiar todos los conectivos $\wedge$ por $\vee$ y eliminar todas las negaciones de α.

Ejemplos:

- $f((\neg p_0 \wedge \neg p_3)) = (p_0 \vee p_3)$
- $f(((\neg p_3 \wedge \neg p_8) \wedge (\neg p_3 \wedge \neg p_2))) = ((p_3 \vee p_8) \vee (p_3 \vee p_2))$

b. Probar que para toda $\alpha \in \mathcal{A}$ se cumple que:

I. $f(\alpha) \vdash \neg\alpha$.

II. $\neg\alpha \models f(\alpha)$

III. Deduzca de las partes anteriores que: α `eq` $\neg f(\alpha)$

Ejercicio 2 (10 puntos)

a. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

   I. $\models \neg(p_1 \vee \neg p_0) \vee ((p_0 \to \neg p_1) \to \neg p_0)$
   II. $(p_0 \wedge p_1) \to p_2, p_2 \to p_3 \models p_0 \to p_3$
   III. $(\neg p_0 \vee p_1), \neg p_0 \to p_2 \models \neg p_1 \to p_2$
   IV. $p_0 \leftrightarrow (p_1 \wedge (p_2 \wedge p_3)), p_1 \vee p_0 \models \neg(p_2 \wedge p_3)$

b. Para cada una de las afirmaciones falsas de la parte anterior, encuentre una letra proposicional o la negación de una letra proposicional, que agregada como hipótesis haga que la afirmación sea verdadera. Justifique su respuesta.

Ejercicio 3 (8 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios.

a. $\neg p \vee \neg q, r \vee \neg s \vdash p \wedge s \to r \wedge \neg q$
b. $p \vee q, p \to r, \neg s \to \neg q \vdash r \vee s$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Se recuerda que un conjunto $\Delta \subseteq \texttt{PROP}$ es completo si: Δ es consistente y para todo $\varphi \in \texttt{PROP}$ se cumple: $\Delta \vdash \varphi$ o $\Delta \vdash \neg\varphi$.

a. Sea v una valuación cualquiera. Sea v' la valuación que se define como:

   - $v'(p_i) = v(p_i)$ si $i \neq k$.
   - $v'(p_k) = 1 - v(p_k)$

   Demostrar que para toda $\varphi \in \texttt{PROP}$: si p_k no ocurre en φ entonces $v(\varphi) = v'(\varphi)$.
b. Demostrar que para todo $\Delta \subseteq \texttt{PROP}$: si $v(\Delta) = 1$ y $v'(\Delta) = 1$ entonces Δ no es completo.
c. Sea Γ un subconjunto finito de $\texttt{PROP}$. Demuestre que no es completo.