Primer parcial de Lógica y Lógica modalidad al Revés

30 de abril 2018

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

a. Defina inductivamente el conjunto $\texttt{PROP}_{\vee,\to,\perp}$ subconjunto de $\texttt{PROP}$ tal que su conjunto de conectivos es $\{\vee, \to, \perp\}$.

b. Defina siguiendo el ERP una función $f : \texttt{PROP}_{\vee,\to,\perp} \to \texttt{PROP}$ que a cada fórmula φ de $\texttt{PROP}_{\vee,\to,\perp}$ le corresponde la fórmula que se obtiene sustituyendo cada letra proposicional p_i de φ por $(p_i \vee \neg p_i)$ y $\perp$ por $\neg\perp$.

   Ejemplo: $f((\perp \to (p_1 \vee p_0))) = ((\neg\perp) \to ((p_1 \vee \neg p_1) \vee (p_0 \vee \neg p_0)))$

c. Demuestre inductivamente que $(\bar{\forall}\varphi \in \texttt{PROP}_{\vee,\to,\perp}) \models f(\varphi)$.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Sean las siguientes fórmulas de $\texttt{PROP}$:

- $\varphi_1 = \neg p_0 \to (p_1 \vee \neg p_2)$
- $\varphi_2 = p_1 \to p_0$
- $\varphi_3 = p_2 \wedge \neg p_0$

Indique, justificando adecuadamente, si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas:

a. $\varphi_1, \varphi_2 \models \varphi_3$

b. $\varphi_1, \varphi_2 \models \neg\varphi_3$

c. $\mathit{Subf}(\varphi_1) \models \varphi_3$, donde $\mathit{Subf}(\varphi_1)$ es el conjunto de subfórmulas de φ_1.

d. Existe $\alpha \in \texttt{PROP}$, tal que $\not\models \alpha \to \varphi_3$ y $\varphi_1, \varphi_2 \models \alpha \to \varphi_3$.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios, donde p, q, r, s, t son letras proposicionales distintas.

a. $p \leftrightarrow \neg p \vdash \bot$
b. $p \vee q, p \rightarrow r, q \rightarrow s \vdash t \rightarrow \neg(\neg r \wedge \neg s)$

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Sean Δ_1 y Δ_2 subconjuntos de $\mathtt{PROP}$ tales que $\Delta_1 \cup \Delta_2$ es inconsistente.

a) Demuestre que si $\Delta_1 = \emptyset$, entonces existe $\varphi \in \mathtt{PROP}$ tal que $\Delta_1 \vdash \varphi$ y $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$.

b) Demuestre que si $\Delta_1 = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ para algún $k \geq 1$ y $\varphi \equiv (\sigma_1 \wedge \ldots \wedge \sigma_k)$, entonces $\Delta_1 \models \varphi$ y $\Delta_2 \models \neg\varphi$.

c) Demuestre para Δ_1 infinito que: existe $\varphi \in \mathtt{PROP}$ tal que $\Delta_1 \vdash \varphi$ y $\Delta_2 \vdash \neg\varphi$.