Primer parcial de Lógica y Lógica modalidad al Revés

2 de Mayo 2017

Indicaciones generales

- Apagar los celulares
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Sea $\Sigma = \{a, b, c\}$ un alfabeto y la siguiente definición de Σ^*

I $\epsilon \in \Sigma^*$

II Si $w \in \Sigma^*$ y $x \in \Sigma$ entonces $xw \in \Sigma^*$

a. Defina la función $\texttt{reverse} : \Sigma^* \to \Sigma^*$ tal que invierte los símbolos de la tira original.

Ejemplo: $\texttt{reverse}(abcabb) = bbacba$

b. Sea y un elemento arbitrario de Σ, demuestre que se cumple:

$(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(\texttt{reverse}(wy) = y\ \texttt{reverse}(w))$

c. Dé una definición inductiva del conjunto CAP de las tiras capicúas (palíndromes) de Σ^*.

d. Demuestre que la definición de CAP es correcta: $(\bar{\forall} w \in \text{CAP})(\ \texttt{reverse}(w) = w)$

e. Demuestre que $(\bar{\forall} w \in \Sigma^*)(w\ \texttt{reverse}(w) \in \text{CAP})$

f. A partir de las propiedades anteriores concluya que $(\bar{\forall} w \in \text{CAP})(ww \in \text{CAP})$

Ejercicio 2 (10 puntos)

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique.

a. $(\bar{\exists} \varphi, \psi \in \texttt{PROP})$ $(\bar{\exists} v_1$ **valuación**$)$ $(v_1(\neg(\neg\varphi \vee \neg\psi)) = 1$ y $v_1(\varphi) = 1$ y $v_1(\psi) = 0)$.

b. $(\bar{\exists} \varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \neq \bot$ y $\varphi \vDash \bot)$.

c. $(\bar{\forall} \varphi, \psi \in \texttt{PROP})$ $(\bar{\exists}\, \Gamma \subseteq \texttt{PROP})$ $(\Gamma \cup \{\psi\} \vDash (\varphi \to \psi) \vee (p_1 \to p_2))$.

d. Para todo $\varphi, \psi, \sigma \in \texttt{PROP}$, si $\varphi \wedge \psi \vDash \sigma$ entonces $\varphi \vDash \sigma$ y $\psi \vDash \sigma$.

e. $p_0 \to (\neg p_1 \vee \bot), p_0 \vDash \bot$.

Ejercicio 3 (10 puntos)

a. Construya una derivación que justifique el siguiente juicio:

$\gamma \to \alpha, \neg\alpha \to (\neg\beta \vee \alpha) \vdash \neg\alpha \to (\neg\beta \wedge \neg\gamma)$

b. Usando la parte anterior demuestre que:

$p_2 \to \neg p_1, p_3 \to p_1, \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1) \vdash \neg p_1 \to (\neg p_2 \wedge \neg p_3)$

c. Complete D_1 de forma tal que justifique:

$p_3 \to p_1, \neg p_1 \to (\neg p_2 \vee p_1) \vdash (p_2 \vee p_3) \to p_1$

siendo D_1:

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\neg p_1 \to \neg p_2 \wedge \neg p_3 \quad \neg p_1}{\neg p_2 \wedge \neg p_3}\,E_\to}{\neg p_2}\,E_\wedge \qquad p_2}{\bot}\,E_\neg}{p_1}\,RAA}{(p_2 \vee p_3) \to p_1}\,I_\to$$

Sugerencia: utilizar la parte anterior.

Nota: En ningún caso se aceptan justificaciones semánticas.

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere una valuación v_1, tal que para algún i y j, $v_1(p_i) \neq v_1(p_j)$ y los siguientes conjuntos:

- $\Gamma = \{\varphi \in \texttt{PROP} \mid v_1(\varphi) = 1\}$.
- $\Delta^+ = \{\varphi \in \Gamma \mid \varphi \text{ es atómica }\}$
- $\Delta^- = \{\neg\varphi \mid \varphi \text{ es atómica y } \varphi \notin \Gamma\}$

Indique cuáles de las siguientes afirmaciones se cumple y cuáles no.Justifique su respuesta.

a. Γ es consistente maximal.
b. Δ^+ es consistente maximal.
c. Δ^- es completo.
d. $\Delta^+ \cup \Delta^-$ es completo.

Recuerde que un conjunto Γ es completo si y sólo si es consistente y para toda φ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ o $\Gamma \vdash \neg\varphi$.