Primer parcial de Lógica

Mayo 2010

Indicaciones generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (10 puntos)

Considere el lenguaje proposicional $\mathcal{L}_0$ con una única letra proposicional: p_0 y conectivos $\{\wedge, \vee\}$.

a. De una definición inductiva de $\mathcal{L}_0$.

b. Demuestre o de un contraejemplo de la siguiente afirmación : $\mathcal{L}_0 \subseteq \mathsf{PROP}$.

c. Considere la definición de valuación de forma análoga a PROP. ¿Cuántas valuaciones distintas existen?

d. Análogamente a PROP se define

$$\alpha \ \texttt{eq} \ \beta \text{ si y solo si } (\bar{\forall} v : valuacion)(v(\alpha) = v(\beta))$$

Demuestre que para cualquier $\alpha \in \mathcal{L}_0$, $\alpha \ \texttt{eq} \ p_0$.

e. Encuentre, si es posible, $\alpha \in \mathcal{L}_0$ tal que $(\bar{\forall} v : valuacion)(v(\alpha) = 1)$. Justifique su respuesta.

Ejercicio 2 (10 puntos)

Considere las siguientes fórmulas de PROP.

- $\alpha_1 = ((p_0 \to p_1) \wedge (p_0 \vee p_1)) \vee \neg p_1$
- $\alpha_2 = (p_0 \to p_1) \wedge p_0 \wedge \neg p_1$
- $\alpha_3 = (p_0 \to p_1) \wedge (p_0 \vee p_1)$

a. Para cada fórmula α_i encuentre alguna fórmula β_i que cumpla las siguientes tres condiciones:

  - $\not\models \neg\beta_i$
  - $\beta_i \models \alpha_i$
  - $\not\models \beta_i \leftrightarrow \alpha_i$

  Justifique en cada caso. De igual manera, justifique si no es posible encontrar alguna de ellas.

b. Sea Γ el conjunto formado por las fórmulas β_i encontradas en la parte anterior. ¿Es Γ un conjunto consistente? Justifique su respuesta.

Ejercicio 3 (10 puntos)

Construya derivaciones que justifiquen los siguientes juicios:

a. $\vdash \quad ((\alpha \vee \beta) \to (\alpha \wedge \beta)) \leftrightarrow (\alpha \leftrightarrow \beta)$

b. $\neg((\psi \to \varphi) \vee \alpha) \quad \vdash \quad \neg\varphi \vee \neg\beta$

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

Ejercicio 4 (10 puntos)

Considere el lenguaje $\mathcal{L}_0$ definido en el primer ejercicio. En este ejercicio pedimos mostrar la corrección y completitud de ese lenguaje con el cálculo DER_0 que definimos a continuación.

1. Si $\varphi \in \mathcal{L}_0$, entonces $\varphi \in \mathsf{DER}_0$

2. Si $\begin{array}{c}\Gamma \\ \diagdown\!\diagup \\ \varphi\end{array} \in \mathsf{DER}_0$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \diagdown\!\diagup \\ \varphi\end{array}}{p_0} \in \mathsf{DER}_0$

3. Si $\begin{array}{c}\Gamma \\ \diagdown\!\diagup \\ p_0\end{array} \in \mathsf{DER}_0$ y $\varphi \in \mathcal{L}_0$, entonces $\dfrac{\begin{array}{c}\Gamma \\ \diagdown\!\diagup \\ p_0\end{array}}{\varphi} \in \mathsf{DER}_0$

Para cualquier derivación $\mathcal{D} \in \mathsf{DER}_0$ se definen, análogamente a DER, el conjunto de hipótesis $H(\mathcal{D})$ y la conclusión $C(\mathcal{D})$. Asimismo, se define la relación $\Gamma \vdash \varphi$.

a. Demuestre que para cualquier $\varphi \in \mathcal{L}_0$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ si y solamente si $\Gamma \neq \emptyset$.

b. Demuestre que el sistema es correcto y completo, es decir,

$$\text{para cualquier } \varphi \in \mathcal{L}_0 \text{ y } \Gamma \subseteq \mathcal{L}_0 : \quad \Gamma \vdash \varphi \text{ si y solamente si } \Gamma \models \varphi.$$