

Lógica

Primer Parcial

Mayo 2007

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **3** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40** puntos.
- Toda respuesta debe estar fundamentada. Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y número de estudiante utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Atención:

Cada ejercicio está antecedido por una pregunta obligatoria marcada con un asterisco (*), la cual no tiene puntaje. Para que un ejercicio sea corregido, la pregunta obligatoria correspondiente al mismo debe ser contestada correctamente. O sea, si dicha pregunta no es contestada correctamente, el ejercicio en cuestión no se corregirá.

EJERCICIO 1 (10 puntos)

Sea $L \subseteq \text{PROP}$ el subconjunto de proposiciones formadas con los conectivos \wedge, \vee y letras de proposición p_i con $i \in \mathbb{N}$.

Pregunta * Defina inductivamente el conjunto L .

Considere la función $F: L \rightarrow L$ que reemplaza todas las ocurrencias del conectivo \wedge por el conectivo \vee . Por ejemplo:

$$F [((p_1 \wedge p_2) \vee p_2)] = ((p_1 \vee p_2) \vee p_2)$$

1. Defina F de forma recursiva.
2. Demuestre por inducción que para toda $\alpha \in L$, para toda valuación v ,
$$v(F[\alpha]) \geq v(\alpha).$$

EJERCICIO 2 (10 puntos)

Pregunta * Dé la definición de consecuencia lógica $\Gamma \models \alpha$

1. Considere el siguiente enunciado: $\Gamma \models (\alpha \vee \neg \beta) \Leftrightarrow \Gamma \models (\neg \alpha \vee \beta)$
 - a. Dé Γ , α y β para los cuales se cumpla el enunciado.
 - b. Dé Γ , α y β para los cuales NO se cumpla el enunciado.
 - c. Dé Γ para el cual el enunciado sea cierto para α y β cualesquiera.
2. Demuestre el siguiente enunciado: $\Gamma \models \neg(\alpha \wedge \neg \beta) \Leftrightarrow \Gamma \models (\neg \alpha \vee \beta)$

EJERCICIO 3 (10 puntos)

Pregunta * Demuestre, mediante la construcción de una derivación, que $\varphi \vee \varphi \vdash \varphi$, indicando reglas aplicadas y cancelaciones si corresponden.

Sean φ , ψ y σ fórmulas cualesquiera de PROP. Demuestre, mediante la construcción de una derivación, que $(\neg \sigma \rightarrow (\neg \varphi \wedge \neg \psi)) \rightarrow ((\varphi \vee \psi) \rightarrow \sigma)$ es teorema.

Todo paso de la derivación debe estar justificado con el nombre de la regla empleada, y para cada hipótesis cancelada, deberá indicarse en qué paso de la derivación se cancela.

En ningún caso son aceptables justificaciones basadas en consideraciones semánticas

EJERCICIO 4 (10 puntos)

Pregunta * Sea $\Gamma \subseteq \text{PROP}$. Dé la definición de $\text{CONS}(\Gamma)$ (i.e. el conjunto de las consecuencias sintácticas de Γ)

Se dice que un conjunto $\Gamma \subseteq \text{PROP}$ es *dependiente* si existe una fórmula $\alpha \in \Gamma$ tal que $\alpha \in \text{CONS}(\Gamma - \{\alpha\})$.

1. Dé un conjunto dependiente.
2. Indique si los siguientes enunciados son verdaderos o no. Justifique su respuesta
 - a. Para todo $\Gamma \subseteq \text{PROP}$, $\text{CONS}(\Gamma)$ es dependiente
 - b. $\{p_i / i \in \mathbb{N}\}$ es dependiente.