

Lógica Primer Parcial

Mayo 1999

Indicaciones Generales

- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En este parcial **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **40 puntos**
- Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Toda respuesta debe estar fundamentada.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad.
- Utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz.
- Iniciar cada ejercicio en hoja nueva.
- Poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Problemas

Ejercicio 1. (12 pts.)

- (a) Considere el conjunto $PROP$ de las proposiciones. Defina recursivamente la función $\tau: PROP \rightarrow PROP$ tal que $\tau(\varphi)$ es la proposición que resulta de aplicar en φ las siguientes transformaciones:
- cada fórmula atómica A de φ se reemplaza por $\perp \rightarrow A$,
 - cada ocurrencia del conectivo \wedge se reemplaza por el conectivo \vee , y
 - cada ocurrencia del conectivo \neg en φ se elimina.

Por ejemplo:

$$\begin{aligned}\tau(\neg(p_1 \leftrightarrow \perp)) &= (\perp \rightarrow p_1) \leftrightarrow (\perp \rightarrow \perp) \\ \tau(\neg(p_1 \rightarrow \perp) \wedge \neg\neg p_2) &= ((\perp \rightarrow p_1) \rightarrow (\perp \rightarrow \perp)) \vee (\perp \rightarrow p_2)\end{aligned}$$

- (b) Demuestre por inducción sobre $PROP$ que para toda $\varphi \in PROP$, para toda valuación v , $v(\tau(\varphi)) = 1$.

Ejercicio 2. (10 pts.)

Sea φ una fórmula de $PROP$ tal que:

para toda $\psi \in PROP$ se cumple $\models \varphi \rightarrow \psi$.

Indique si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique su respuesta para los casos en que ésta sea afirmativa, y dé un contraejemplo si su respuesta es negativa.

- (a) $\models \varphi$
- (b) $\models \neg\varphi$
- (c) Para toda $\psi \in PROP$, $\models \psi \rightarrow \varphi$
- (d) Para toda $\psi \in PROP$ si $\models \psi \rightarrow \varphi$ entonces $\models \psi \leftrightarrow \perp$.

Ejercicio 3. (8 pts.)

Construya una derivación de $\varphi \wedge \sigma \rightarrow \psi$, $\varphi \rightarrow \sigma \vdash \neg\psi \rightarrow \neg\varphi$.

Ejercicio 4. (10 pts.)

1. Determine cuáles de las siguientes afirmaciones son correctas y cuáles no. En ambos casos justifique su respuesta.
 - (a) El conjunto $\{\neg p_1, \neg p_2, \dots, \neg p_n, \dots\}$ es consistente.
 - (b) Para todo $\Gamma \subseteq PROP$, si Γ es consistente y *no es consistente maximal*, entonces el conjunto $\{\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$ es inconsistente.
2. Demuestre que para todo $\Gamma \subseteq PROP$, si Γ es consistente maximal entonces el conjunto $\{\neg\varphi \mid \varphi \in \Gamma\}$ es inconsistente.