Parcial Integrador de Lógica

20 de julio 2020

Indicaciones generales

- Apagar los celulares.
- La duración del parcial es de **tres (3)** horas.
- En esta prueba **no** se permite consultar material alguno.
- Puntaje: **100** puntos.
- **Toda respuesta debe estar fundamentada.** Pueden usarse los resultados que aparecen en el texto del curso, en esos casos debe describirse con precisión el enunciado que se utiliza.
- Numerar todas las hojas e incluir en cada una su nombre y cédula de identidad, utilizar las hojas de un solo lado, escribir con lápiz, iniciar cada ejercicio en hoja nueva y poner en la primera hoja la cantidad de hojas entregadas.

Ejercicio 1 (25 puntos)

Considere los siguientes conjuntos de símbolos:

- $VCL = \{a, e, i, u, o\}$
- $DIG = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

El primero son las letras vocales y el segundo los dígitos.

a. Construya una definición libre del lenguaje $\mathcal{L}$ de las tiras tales que se cumplen todas las siguientes condiciones:

- Todas las palabras terminan en un dígito.
- Todas las palabras comienzan en un dígito.
- No hay dos dígitos seguidos.
- No hay dos vocales seguidas.

b. Pruebe que todas las tiras del lenguaje tienen por lo menos un símbolo.

c. Defina la función $CVOC : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de vocales de una palabra.

d. Defina la función $CDIG : \mathcal{L} \to \mathbb{N}$ que cuenta la cantidad de dígitos de una palabra.

e. Demuestre que para cualquier tira ω de $\mathcal{L}$ se cumple que: $CDIG(\omega) - CVOC(\omega) = 1$.

Ejercicio 2 (25 puntos)

a. Construya un tableau semántico para determinar si el siguiente juicio es verdadero:

$$p \leftrightarrow \neg r, p \to q \models q \vee r$$

b. Considere un lenguaje de primer orden de tipo $\langle 2; 1; 0\rangle$ la siguiente fórmula:

$$\varphi = (\forall x)\neg(\exists y)(P(x,y) \land P(y, f(x)))$$

Considere además las siguiente estructura:

- $\mathcal{M}_1 = \langle \mathbb{N}, <, \mathit{sucesor}\rangle$

Indique cuales de las siguientes afirmaciones son verdadras y cuales falsas. Justifique sus respuestas.

I. $\mathcal{M}_1 \models \varphi$
II. $\models \varphi$

Ejercicio 3 (25 puntos)

Construir derivaciones para probar los siguientes juicios:

a. $\vdash (\alpha \to \beta) \lor (\neg\alpha \to \neg\beta)$
b. $(\forall y)(\forall x)(P(x,y) \leftrightarrow f(x) =' y) \vdash (\forall x)(\forall z)((\exists y)(P(x,y) \land P(y,z)) \to f(f(x)) =' z)$

No se admiten consideraciones semánticas.

Ejercicio 4 (25 puntos)

Construya subconjuntos Γ_i de `PROP` que cumplan las siguientes condiciones. Justifique sus respuestas y en caso de no ser posible explique por qué.

a. Γ_1 tal que sea teoría y $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})(p_i \notin \Gamma_1$ y $\neg p_i \notin \Gamma_1)$
b. Γ_2 tal que sea consistente maximal y $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N}) p_i \notin \Gamma_2$
c. Γ_3 tal que sea completo y $(\bar{\forall} i \in \mathbb{N})(p_i \notin \Gamma_3$ y $\neg p_i \notin \Gamma_3)$