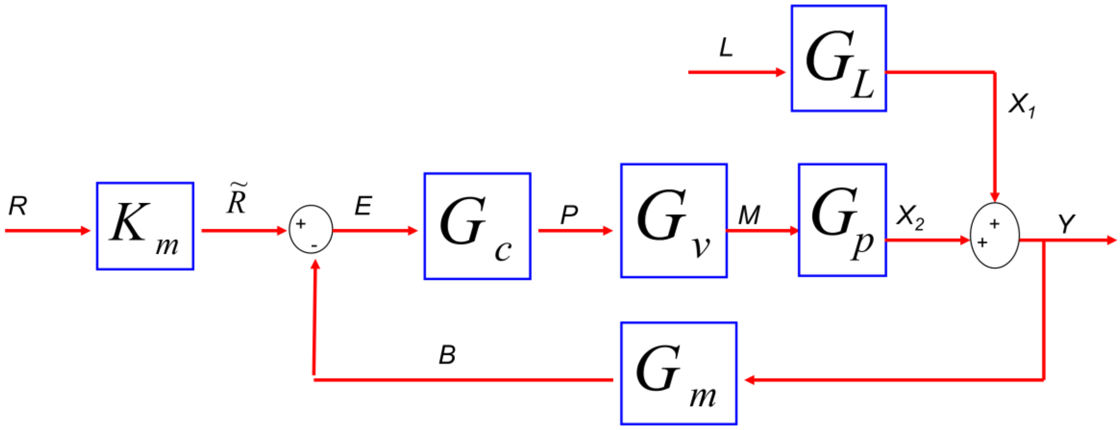
15 ESTABILIDAD DEL BUCLE CERRADO

Los valores que toman los parámetros del controlador repercuten en la respuesta de un sistema con un bucle feedback. Es más, en ciertos casos una selección equivocada del valor del parámetro puede desestabilizar el sistema, esto es, provocar una respuesta que no tienda a un valor de estado estacionario.

Hemos visto que el diagrama de bloques de un bucle feedback es el siguiente:



Consideremos por ejemplo que fueran

$$G_c = K_c \qquad G_v = \frac{1}{2s+1}$$
$$G_p = G_L = \frac{1}{5s+1} \qquad G_m = \frac{1}{s+1}$$

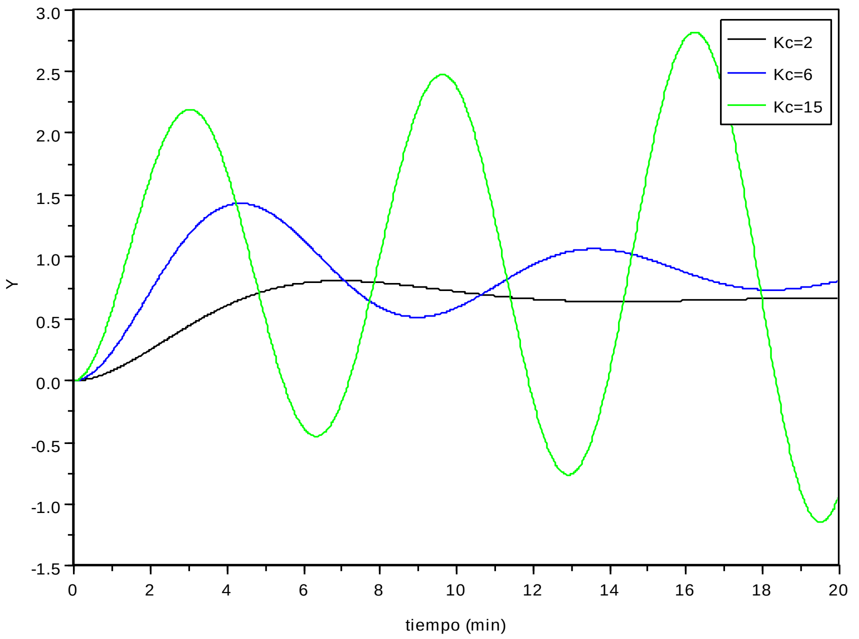
Y supongamos que ocurre un cambio en escalón en el set point. Sabemos que

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1 + G_c G_v G_p G_m}$$

O sea que en este caso

$$Y(s) = \frac{1}{s} \frac{K_c(s+1)}{10s^3 + 17s^2 + 8s + 1 + K_c}$$

La respuesta depende entonces del valor que tome la ganancia del controlador K_c . La siguiente es una gráfica donde se observa que a valores grandes de la ganancia la respuesta del sistema no es estable. Véase ‘ejem14.1’.



Como criterio general de estabilidad podemos considerar que un sistema lineal (sin restricciones) es estable si las respuestas están acotadas para todo tipo de entrada que sea acotada.

Muchos procesos son estables en "bucle abierto" (open-loop) o "autoregulados". Sin embargo algunos no, por ejemplo los procesos integradores.

En general, podemos escribir la salida del sistema de la siguiente manera:

$$Y = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1+G_{OL}} R + \frac{G_L}{1+G_{OL}} L \qquad G_{OL} = G_c G_v G_p G_m$$

Si solo cambia el set point queda

$$\frac{Y}{R} = \frac{K_m G_c G_v G_p}{1+G_{OL}}$$

Que podemos escribir de la siguiente manera

$$\frac{Y}{R} = K' \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} \qquad n \geq m$$

Se llaman polos a las raíces del denominador, esto es las raíces de $1+G_{OL}=0$

Supongamos polos distintos y un escalón unitario en el set point (transformada 1/s)

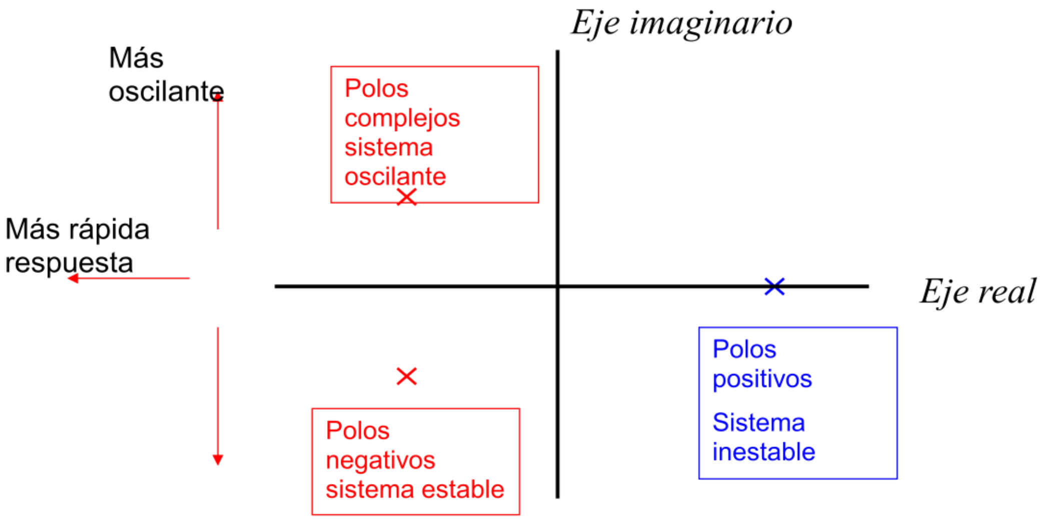
$$Y(s) = \frac{K'}{s} \frac{(s-z_1)(s-z_2)\ldots(s-z_m)}{(s-p_1)(s-p_2)\ldots(s-p_n)} = \frac{A_0}{s} + \frac{A_1}{s-p_1} + \frac{A_2}{s-p_2} + \ldots + \frac{A_n}{s-p_n}$$

La respuesta en el dominio del tiempo será entonces

$$y(t) = A_0 + A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \ldots + A_n e^{p_n t}$$

Y podemos observar fácilmente que para que la respuesta converja, los exponentes, esto es, los polos, deben ser todos negativos (o con parte real negativa). La misma conclusión puede hacerse cuando hay un cambio en la carga pues el denominador de la función de transferencia correspondiente a la carga es el mismo, o sea tiene las mismas raíces. Por lo tanto la conclusión es general, cualquiera sea el cambio.

Criterio general de estabilidad: el sistema con control feedback es estable si y solo si todas las raíces de la ecuación características son negativas o tienen parte real negativa.



Observemos que una raíz $s = -a$ pequeña corresponde a una constante de tiempo $\tau = 1/a$ grande y viceversa. O sea, polos cerca del eje imaginario implican respuestas más lentas y viceversa.

Este es un criterio necesario, pero no suficiente. Otro criterio más general de estabilidad es el de Routh. Se estudia la ecuación característica (denominador de la función de transferencia):

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 = 0$$

Condición necesaria es: $a_n > 0$ para todo n

Para la condición suficiente se construye el siguiente arreglo:

$$\begin{array}{cccc} a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \ldots \\ a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \ldots \\ b_1 & b_2 & b_3 & \ldots \\ c_1 & c_2 & \ldots & \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \end{array}$$

Donde

$$b_1 = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

$$b_2 = \frac{a_{n-1}a_{n-4} - a_n a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

$$\vdots$$

$$c_1 = \frac{b_1 a_{n-3} - a_{n-1}b_2}{b_1}$$

$$c_2 = \frac{b_1 a_{n-5} - a_{n-1}b_3}{b_1}$$

$$\vdots$$

La condición suficiente es que la primera columna contenga exclusivamente elementos positivos.