# Sistemas de Comunicación

## Clase 6: Modulación Exponencial

# Objetivo

- Modulación Exponencial (Angular): FM, PM
- Análisis de la Señal
- Espectro de un tono.
- Estimación de ancho de banda

# Modulación Exponencial

- Motivación: Surge con la idea de reducir el ancho de banda de la modulación lineal, pero se encontró que se puede lograr eficiencia en el uso de la energía ($S_T$), mejor $(S/N)_D$ a costa de usar mayor ancho de banda ($B_T$).

- Fijada una $(S/N)_D$ deseada permite bajar $S_T$ aumentando $B_T$ en determinadas condiciones de recepción $(S/N)_R > (S/N)_{RTH}$

# Modulación en Fase (PM) y en Frecuencia(FM)

- Análisis de la señal

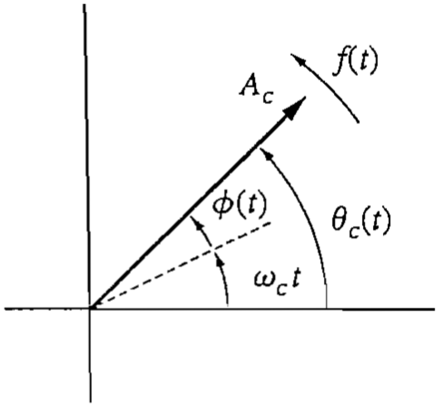
$$x_T(t) = A_c \cos(\theta_i(t)) = A_c \operatorname{Re}\left(e^{j\theta_i(t)}\right)$$

$\theta_i(t)$: ángulo instantáneo total de la señal modulada

$f_i(t)$: frecuencia instantáneo total de la señal modulada

$$f_i(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\theta_i(t)}{dt} = \frac{1}{2\pi}\dot{\theta}_i(t)$$

$$\theta_i(t) = 2\pi\int f_i(t)\,dt$$



# PM

$$\theta_{i_{PM}}(t) = \theta_c t) = w_c t + \phi_\Delta x(t) = w_c t + \phi(t) \text{ lineal con x(t)}$$

$$f_{i_{PM}}(t) = f_c + \frac{\phi_\Delta}{2\pi}\dot{x}(t)$$

$$\boxed{x_{T_{PM}}(t) = A_c \cos(w_c t + \phi_\Delta x(t)) \quad \text{con } 0 < \phi_\Delta \leq \pi}$$

$\phi_\Delta$ : máximo desfasaje, índice de modulación de fase, desviación de fase

$$\phi(t) = \phi_\Delta x(t) \text{ con } 0 < \phi_\Delta \leq \pi \rightarrow -\pi < \phi_\Delta x(t) \leq \pi$$

(no haya ambiguedad en la detección)

Si $\phi_\Delta << 1$: Modulación de Fase de banda angosta.

# FM

$$f_{i_{FM}}(t) = f_c + f_\Delta x(t) \quad \text{lineal con x(t)}$$

$$\theta_{i_{FM}}(t) = 2\pi f_c + 2\pi f_\Delta \int_0^t x(\lambda)d\lambda$$

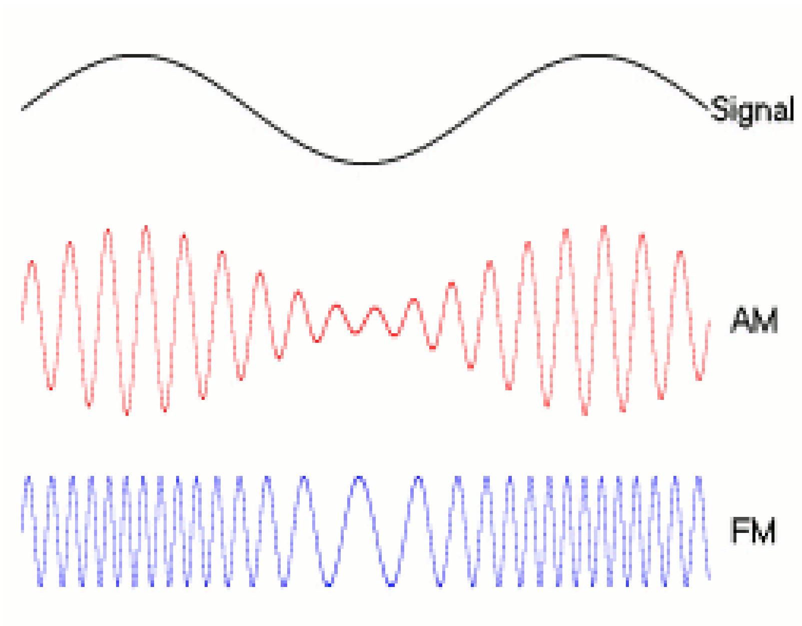
$$\phi_{FM}(t) = 2\pi f_\Delta \int_0^t x(\lambda)d\lambda \quad \text{asumimos } \bar{x}(t) = 0$$

$$\boxed{x_{T_{FM}}(t) = A_c \cos(w_c t + 2\pi f_\Delta \int_0^t x(\lambda)d\lambda)}$$

$f_\Delta$ : máximo desviación de frecuencia,

desviación de frecuencia, en la práctica $f_\Delta << f_c$

# FM




Amfm3-en-de.gif

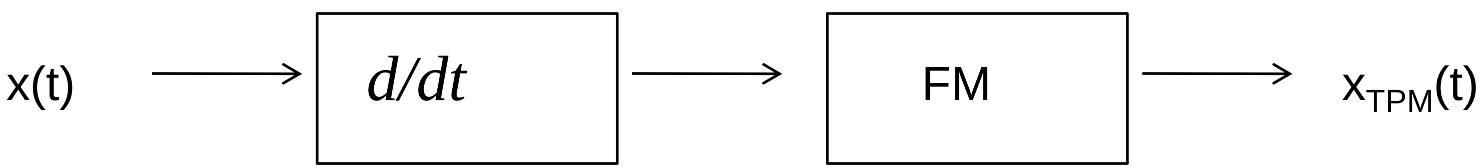
Berserkerus

El mensaje reside en los cruces por cero de la portadora y la onda modulada no se parece al mensaje

# Comparación entre PM y FM

| | Instantaneous phase $\phi(t)$ | Instantaneous frequency $f(t)$ |
|---|---|---|
| PM | $\phi_\Delta x(t)$ | $f_c + \dfrac{1}{2\pi}\phi_\Delta \dot{x}(t)$ |
| FM | $2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)\, d\lambda$ | $f_c + f_\Delta x(t)$ |

Generación de PM usando FM



# Comparación entre PM y FM

| | Instantaneous phase $\phi(t)$ | Instantaneous frequency $f(t)$ |
|---|---|---|
| PM | $\phi_\Delta x(t)$ | $f_c + \frac{1}{2\pi}\phi_\Delta \dot{x}(t)$ |
| FM | $2\pi f_\Delta \int^t x(\lambda)\, d\lambda$ | $f_c + f_\Delta x(t)$ |

Generación de FM usando PM

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int} \longrightarrow \boxed{\text{PM}} \longrightarrow x_{TFM}(t)$$

# Potencia de Trasmisión

$$\boxed{S_T = \frac{A_c^2}{2}}$$

potencia media

independiente del mensaje

# Análisis Espectral

$$\text{Modulación de un tono}$$

$$\text{Sup}:$$

$$\begin{cases} x(t) = A_m \cos w_m t & \text{FM} \\ x(t) = A_m \sin w_m t & \text{PM} \end{cases}$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{T_{FM}}(t) &= A_c \cos(w_c t + \frac{A_m f_\Delta}{f_m} \sin w_m t) \ \text{FM} \\ x_{T_{PM}}(t) &= A_c \cos(w_c t + A_m \phi_\Delta \sin w_m t\,) \ \text{PM}. \end{aligned}}$$

# Índice de Modulación β

$$\begin{cases} \beta_{FM} = \dfrac{A_m f_\Delta}{f_m} & \text{FM} \\ \beta_{PM} = A_m \phi_\Delta & \text{PM} \end{cases}$$

La señal modulada se puede representar :

$$x_T(t) = A_c \cos(w_c t + \beta \sin w_m t)$$

$$x_T(t) = \mathrm{Re}\left\{ A_c e^{j w_c t} e^{j \beta \sin w_m t} \right\}$$

# Funciones de Bessel $J_n(\beta)$

$$e^{j\beta \sin w_m t} = \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{jnw_m t}$$

$$c_n = \frac{1}{T_m} \int_{-\frac{T_m}{2}}^{\frac{T_m}{2}} e^{j\beta \sin w_m \lambda} e^{-jnw_m \lambda} d\lambda \quad \text{con} \quad Tm = \frac{1}{f_m}$$

$$\boxed{c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{j\beta \sin z} e^{-jnz} dz = J_n(\beta)}$$

$J_n(\beta)$: función de Bessel de primera clase, orden n y argumento $\beta$

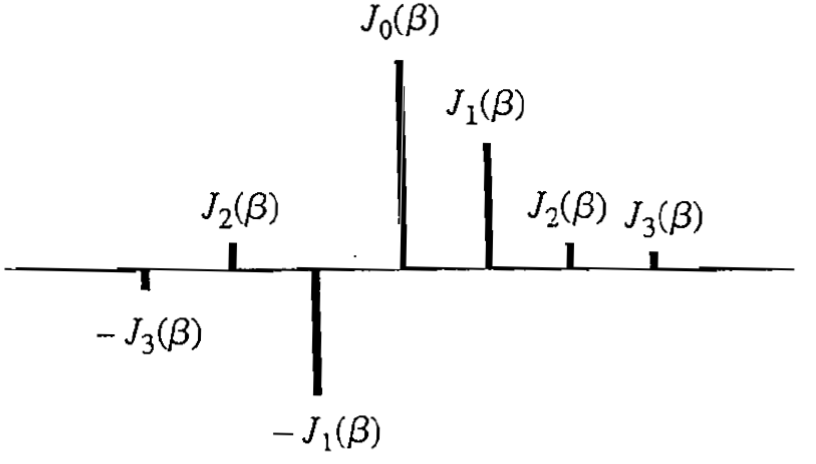
# Propiedades de $J_n(\beta)$

$$1.\ J^*_n(\beta) = J_n(\beta) \quad \text{funciones reales}$$

$$2.\ J_{-n}(\beta) = (-1)^n J_n(\beta)$$

$$3.\ \text{si } \beta = 0 \quad \begin{cases} J_0(0) = 1 & \text{n} = 0 \\ J_n(0) = 0 & \text{n} \neq 0 \end{cases}$$

$$4.\ \lim_{\text{n}\to\infty} J_n(\beta) = 0$$



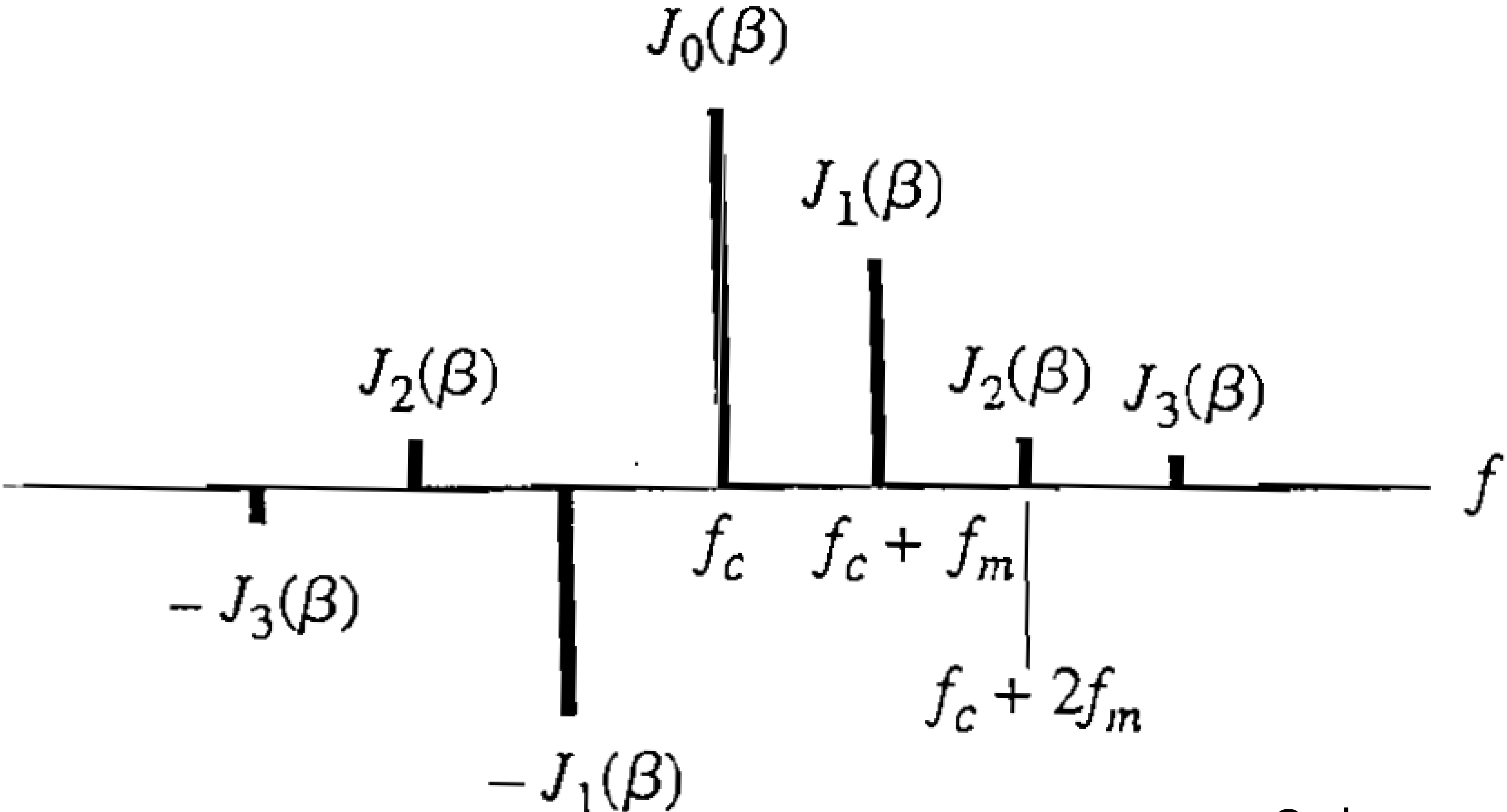
# Espectro de un tono

$$x_T(t) = \mathrm{Re}\left\{ A_c e^{j w_c t} \sum_{-\infty}^{+\infty} c_n e^{j n w_m t} \right\}$$

$$x_T(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \mathrm{Re}\left\{ e^{j w_c t} e^{j n w_m t} \right\}$$

$$x_T(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(w_c t + n w_m t)$$

# Espectro de un tono



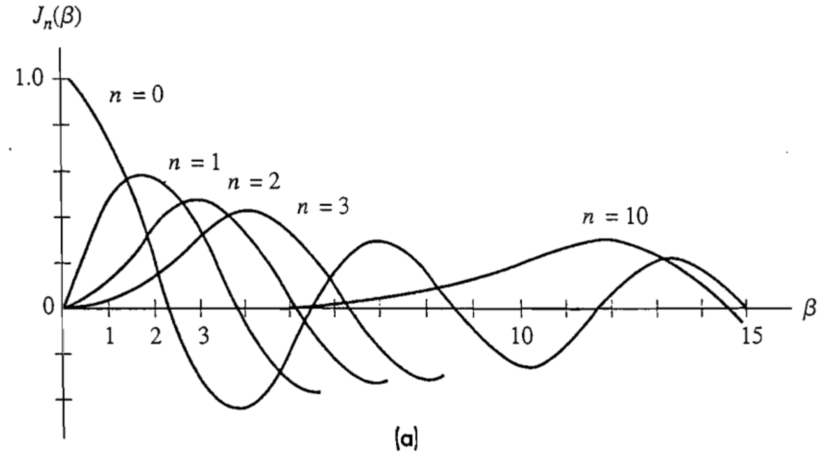

Carlson

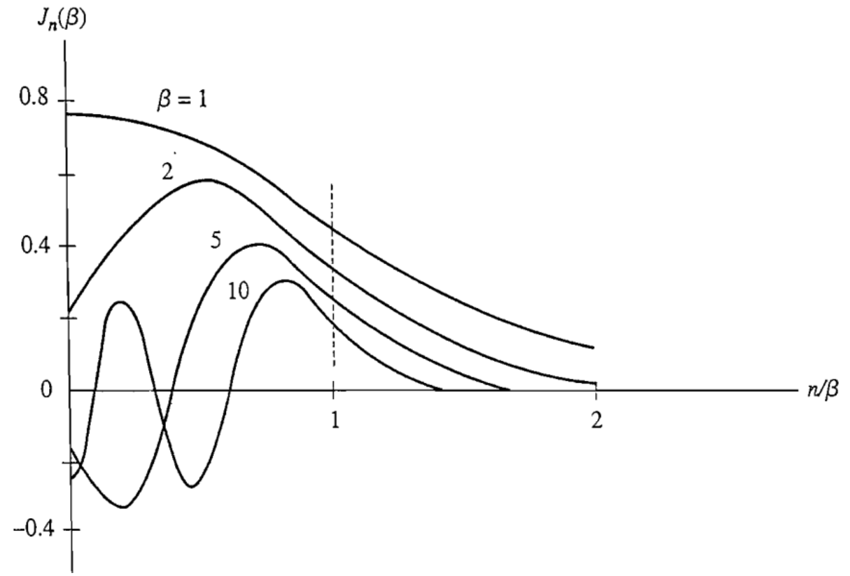
# Espectro de un tono

¿Cómo varía el espectro en función de β?

$$\begin{cases} \beta_{FM} = \dfrac{A_m f_\Delta}{f_c} & \text{FM} \\ \beta_{PM} = A_m \phi_\Delta & \text{PM} \end{cases}$$

$$J_0(\beta) = 0 \quad \text{para}\ \beta = 2{,}4\ 5{,}5\ldots$$



# Espectro de un tono

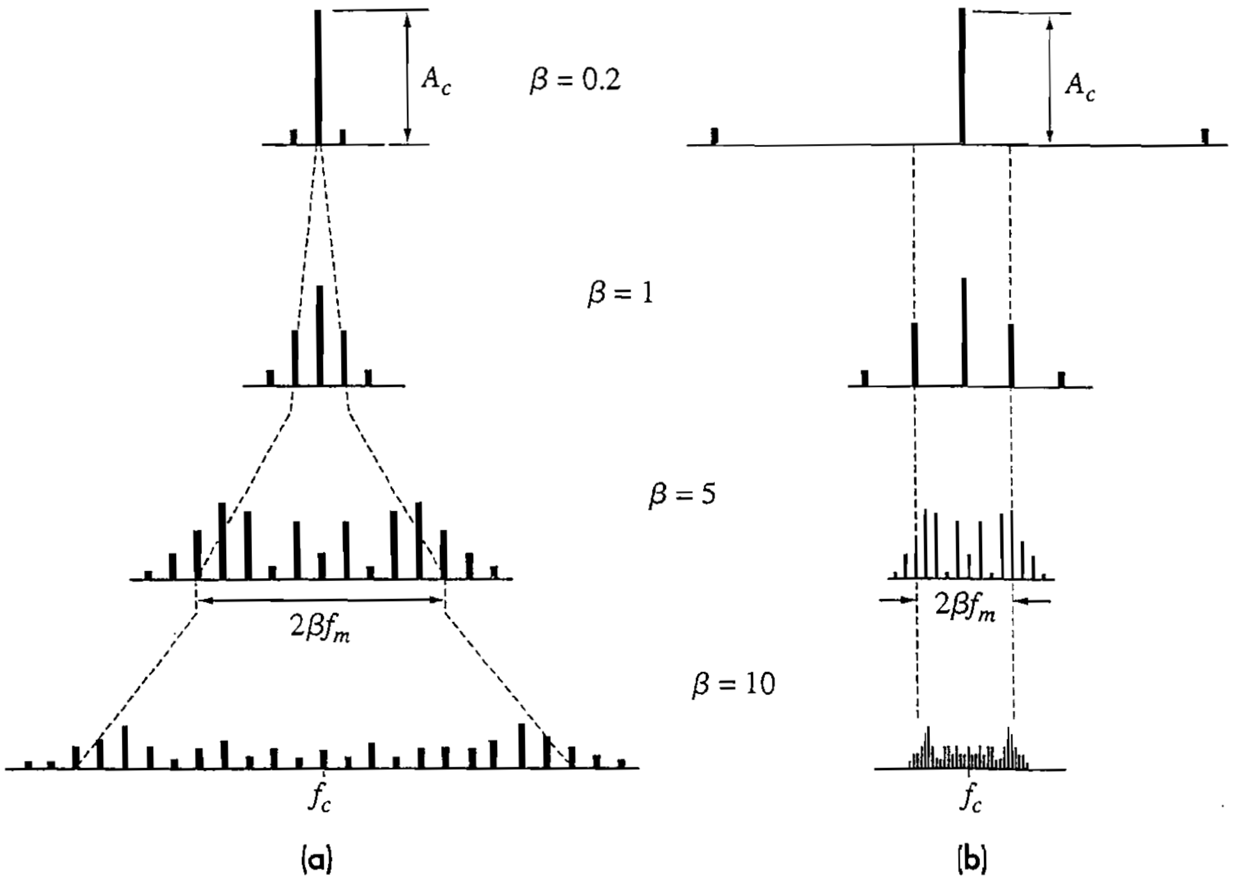
Table 5.1–2 Selected values of $J_n(\beta)$

| $n$ | $J_n(0.1)$ | $J_n(0.2)$ | $J_n(0.5)$ | $J_n(1.0)$ | $J_n(2.0)$ | $J_n(5.0)$ | $J_n(10)$ | $n$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 1.00 | 0.99 | 0.94 | 0.77 | 0.22 | −0.18 | −0.25 | 0 |
| 1 | 0.05 | 0.10 | 0.24 | 0.44 | 0.58 | −0.33 | 0.04 | 1 |
| 2 | | | 0.03 | 0.11 | 0.35 | 0.05 | 0.25 | 2 |
| 3 | | | | 0.02 | 0.13 | 0.36 | 0.06 | 3 |
| 4 | | | | | 0.03 | 0.39 | −0.22 | 4 |
| 5 | | | | | | 0.26 | −0.23 | 5 |
| 6 | | | | | | 0.13 | −0.01 | 6 |
| 7 | | | | | | 0.05 | 0.22 | 7 |
| 8 | | | | | | 0.02 | 0.32 | 8 |
| 9 | | | | | | | 0.29 | 9 |
| 10 | | | | | | | 0.21 | 10 |
| 11 | | | | | | | 0.12 | 11 |
| 12 | | | | | | | 0.06 | 12 |
| 13 | | | | | | | 0.03 | 13 |
| 14 | | | | | | | 0.01 | 14 |

$\beta$<<1 similar a AM
$\beta$>>1 muchas líneas laterales ancho de banda muy grande

Carlson

# Espectro de un tono




a) FM o PM con $f_m$ fijo

b) FM con $A_m$ $f_\Delta$ fijo

Carlson