Fundamentos de Programación Entera
2. Formulación y optimalidad

Carlos Testuri – Fernando Islas

Departamento de Investigación Operativa – Instituto de Computación
Facultad de Ingeniería – Universidad de la República

2012-2023

Contenido

Formulaciones

Dado el problema MIP con parámetros: $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $E \in \mathbb{R}^{m \times p}$, $b \in \mathbb{R}^m$, $c \in \mathbb{R}^n$, $d \in \mathbb{R}^p$, y variables: $x \in \mathbb{Z}^n$, $y \in \mathbb{R}^p$,

$$\begin{array}{rl} \max & c^\tau x + d^\tau y \\ \text{s.a} & Ax + Ey \leq b \\ & x \geq 0 \text{ entera}, y \geq 0. \end{array}$$

Sea $X = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p : Ax + Ey \leq b, x \geq 0 \text{ entera}, y \geq 0\}$ su conjunto de soluciones factibles.

Un poliedro $P \subseteq \mathbb{R}^{n+p}$ es una *formulación* para el conjunto X si y sólo si $X = P \cap (\mathbb{Z}^n \times \mathbb{R}^p)$.

Una de las propiedades de la programación entera es permitir formulaciones alternativas para un mismo problema.

Formulaciones alternativas: ejemplo

Dado el conjunto de soluciones factibles
$X = \{(0,0,0), (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1), (0,1,1)\} \subset \mathbb{B}^3$.

Se tienen las formulaciones alternativas de X:

$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad 85x_1 + 53x_2 + 18x_3 \leq 100\}$,

$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 3\}$,

$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_3 \leq 1\}$,

¿Cómo pueden verificarse?

Formulaciones alternativas: caso formulación equivalente a UFL (1/3)

Dada la variante del problema UFL con suministro de la demanda normalizado a uno tal que $x'_{ij} := x_{ij}/d_i$ y $M := m$,

$$\begin{array}{cl} \min & \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} d_i x'_{ij} \\ \text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m, \\ & \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} \leq m y_j, \quad j = 1, ..., n, \\ & x'_{ij} \geq 0, y_j \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n. \end{array}$$

Parámetros

- f_j: costo fijo de instalar la planta j
- c_{ij}: costo de suministrar la demanda del cliente i desde la planta j
- d_i: demanda del cliente i

Variables

- y_j: 1, si se instala la planta j, 0 en o.c.
- x'_{ij}: fracción de demanda del cliente i suministrada por la planta j, $x'_{ij} \in [0, 1]$

Formulaciones alternativas: caso formulación equivalente a UFL (2/3)

Dada la planta j se tienen las restricciones

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} \leq m y_j, \\ 0 \leq x'_{ij} \leq 1, \quad i = 1, ..., m, \\ y_j \in \{0, 1\}; \end{array}$$

estas expresan la condición lógica: para cada i, si $x'_{ij} > 0$ entonces $y_j = 1$.

Lo que permite, para el mismo conjunto de variables, establecer un conjunto de restricciones alternativo a las anteriores:

$$\begin{array}{l} 0 \leq x'_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, ..., m, \\ y_j \in \{0, 1\}. \end{array}$$

Formulaciones alternativas: caso formulación equivalente a UFL (3/3)

Dada la variante

$$
\begin{array}{rl}
\min & \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} d_i x'_{ij} \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m, \\
& \sum_{i=1}^{m} x'_{ij} \leq m y_j, \quad j = 1, ..., n, \\
& x'_{ij} \geq 0, y_j \in \{0,1\}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.
\end{array}
$$

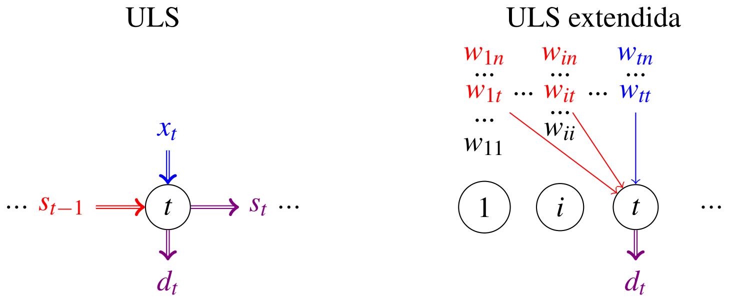
La formulación alternativa *equivalente* completa es

$$
\begin{array}{rl}
\min & \sum_{j=1}^{n} f_j y_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} d_i x'_{ij} \\
\text{s.a} & \sum_{j=1}^{n} x'_{ij} = 1, \quad i = 1, ..., m, \\
& x'_{ij} \leq y_j, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n, \\
& x'_{ij} \geq 0, y_j \in \{0,1\}, \quad i = 1, ..., m, j = 1, ..., n.
\end{array}
$$

¿Cómo se comparan?

Formulaciones alternativas: caso formulación extendida a ULS (1/2)

El caso con diferentes variables se denomina formulación *extendida*.
Si en el problema ULS en vez de utilizar las variables de producción e inventario por período (x_t y s_t), se utiliza una variable, w_{it}, que indica la cantidad producida en el período i que se utiliza para satisfacer la demanda del período t, tal que $1 \leq i \leq t$.



Donde se tiene que: $x_t = \sum_{t'=t}^{n} w_{tt'}$ y ¿$d_t = ...$?

Formulaciones alternativas: caso formulación extendida a ULS (2/2)

Las variable de activación, y_t, y los parámetros se mantienen en la formulación extendida.
¿Cómo determinar, en la formulación extendida,

1. el costo de la producción,
2. el costo del inventario,
3. el balance de material, y
4. la activación de la producción, y_t ?

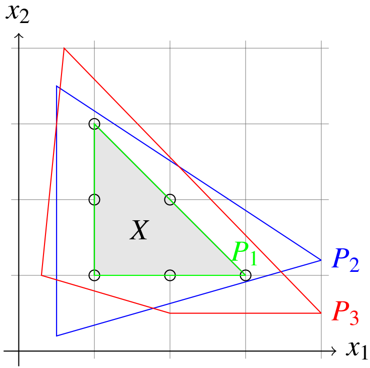
La formulación *extendida* completa es

$$
\begin{array}{ll}
\min & \sum_{t=1}^{n} p_t \sum_{t'=t}^{n} w_{tt'} + \sum_{t=1}^{n} h_t \sum_{i=1}^{t} \sum_{t'=t+1}^{n+1} w_{it'} + \sum_{t=1}^{n} f_t y_t \\
\text{s.a} & \sum_{i=1}^{t} w_{it} = d_t, \quad t = 1, ..., n, \\
& w_{it} \leq d_t y_i, \quad i = 1, ..., t, \quad t = 1, ..., n, \\
& w_{it} \geq 0, y_t \in \{0, 1\}, \quad i = 1, ..., t, \quad t = 1, ..., n.
\end{array}
$$

A pesar de tener más variables y restricciones es una “mejor” formulación.

Bondad de las formulaciones

Para un problema dado existe un número ilimitado de formulaciones.
Ej. dado el conj. factible X se tienen las formulaciones P_1, P_2, y P_3:



¿Hay una mejor formulación? ¿Cómo elegirla?

Bondad de las formulaciones: formulación ideal

Se dice que la formulación P de X es *ideal* cuando coincide con el casco convexo de X, $P = \text{conv}(X)$.

En términos de solución óptima

$$\left\{ \begin{array}{cl} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & x \in X \end{array} \right\} \text{es equivalente a} \left\{ \begin{array}{cl} \max & c^\tau x \\ \text{s.a} & x \in P = \text{conv}(X) \end{array} \right\}.$$

La formulación P se puede resolver mediante programación lineal. Su valor óptimo coincide con el del problema en X, su solución óptima es integral y en caso de ser única coincide con la solución óptima en X.

Bondad de las formulaciones: mejor formulación

La equivalencia de la reducción a una formulación ideal se cumple teoricamente tanto para problemas IP como MIP.

Independientemente de que X sea o no acotado, en general se necesita una cantidad exponencial de inecuaciones para describir $\text{conv}(X)$.

Dadas dos formulaciones, ¿cómo determinar cual es la mejor?

Para toda formulación P de X se cumple que $X \subseteq \text{conv}(X) \subseteq P$.
Entonces, dadas dos formulaciones de X, P_a y P_b, se dice que P_a es una *mejor formulación* que P_b, si $P_a \subset P_b$.

Bondad de las formulaciones: ejemplo mejor formulación

Dado el conjunto de puntos
$X = \{(0,0,0),(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1),(0,1,1)\}$.

Con las formulaciones alternativas:
$P_1 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad 85x_1 + 53x_2 + 18x_3 \leq 100\}$,
$P_2 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad 3x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leq 3\}$,
$P_3 = \{x \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x \leq 1, \quad x_1 + x_2 \leq 1, \quad x_1 + x_3 \leq 1\}$.

Se cumple que $P_3 \subset P_2 \subset P_1$, y que $P_3 = \mathrm{conv}(X)$.

Condiciones de optimalidad

Dado un problema IP

$$z = \max\{c(x) : x \in X\}.$$

¿Cómo determinar que una solución factible, x^*, es óptima?

Desde el punto de vista algorítmico.
¿Cómo establecer condiciones de optimalidad para encontrar x^*?

A diferencia de programación lineal, no se conoce un método general de resolución.

Una enfoque algorítmico básico es determinar secuencias de cotas sobre los valores de la función objetivo, convergentes al valor óptimo z,

Secuencias de cotas

Algorítmicamente se pueden determinan secuencias de cotas inferiores y superiores del valor óptimo buscado, z.

Se pueden establecer: una secuencia creciente de cotas inferiores,

$$\underline{z_1} < \ldots < \underline{z_t} \leq z,$$

y una secuencia decreciente de cotas superiores,

$$\overline{z_1} > \ldots > \overline{z_s} \geq z,$$

que permiten determinar una condición de optimalidad práctica,

$$\overline{z_s} - \underline{z_t} < \epsilon,$$

para cierto umbral ϵ.

Cotas primales

Las cotas inferiores del valor óptimo se obtienen a partir de la evaluación de soluciones factibles del problema.
La solución factible $x^* \in X$ establece la cota inferior $\underline{z} = c(x^*) \leq z$.

Para algunos problemas la determinación de soluciones factibles es fácil, y su dificultad radica en determinar buenas soluciones.

Para otros problemas la determinación de soluciones factibles es tan difícil como el problema en sí mismo.

Para un problema de maximización, se les denomina *cotas primales* debido a que se obtienen a partir del problema original.

Cotas duales

Las cotas superiores del valor óptimo para un problema de maximización se denominan *cotas duales*.

Estas se pueden obtener a partir de la relajación del problema, es decir reemplazando el problema original por un problema más simple.

Para relajar un problema de hay dos mecanismos, que se pueden usar solos o combinados:

1. ampliar el conjunto de soluciones factibles,
2. reemplazar la función objetivo por una función que tenga los mismos o mayores valores para cada solución factible (caso maximización).

Relajación

El problema

$$(\text{RP})\, z^R = \max\{f(x) : x \in T\}$$

es una *relajación* de

$$(\text{IP})\, z = \max\{c(x) : x \in X\}$$

si:

1. $X \subseteq T$,
2. $f(x) \geq c(x)$ para todo $x \in X$.

Proposición (1)

Si x^* es una solución optima de IP, entonces

$$x^* \in X \subseteq T \quad y \quad z = c(x^*) \leq f(x^*) \leq z^R.$$

¿Cómo construir relajaciones?

Relajación a programación lineal: mejor formulación

La forma más común es relajar el espacio factible, eliminando restricciones y manteniendo la función objetivo.

La relajación del espacio factible más usada consiste en que las variables enteras del problema original pasen a ser variables reales.

El problema $\max\{c^\tau x : x \in P \cap \mathbb{Z}^n\}$ con formulación $P = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b\}$ tiene como *relajación a programación lineal* (LP) el problema $z^{LP} = \max\{c^\tau x : x \in P\}$.

Proposición (2)

Dadas P_1 y P_2, formulaciones del problema $\max\{c^\tau x : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$.
Sea P_1 una mejor formulación que P_2, es decir $P_1 \subset P_2$.
Donde $z_i^{LP} = \max\{c^\tau x : x \in P_i\}$, para $i = 1, 2$, son los valores de las respectivas relajaciones a programación lineal, entonces $z_1^{LP} \leq z_2^{LP}$.

Relajación a programación lineal: optimalidad

Las relajaciones también pueden permitir determinar optimalidad.

Proposición (3)

1. Si una relajación RP es infactible, su problema original IP es infactible.
2. Sea x^* una solución óptima de RP, si $x^* \in X$ y $f(x^*) = c(x^*)$, entonces x^* es una solución optima de IP.

Relajación Lagrangeana

Otra alternativa de relajación es sustituir restricciones del problema original por penalizaciones de su no cumplimiento.

Proposición (4)

Dados el problema $z = \max\{c^\tau x : Ax \leq b, x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$ *y el parámetro* u *(multiplicador de Lagrange), se tiene el problema*
$z(u) = \max\{c^\tau x + u^\tau(b - Ax) : x \in X \subseteq \mathbb{Z}^n\}$.
Entonces $z(u) \geq z$ *para todo* $u \geq 0$.

Dualidad

En programación lineal la propiedad de dualidad permite obtener cotas superiores (caso de max.)
En programación entera también se pueden obtener cotas superiores.

La propiedad relevante de los problemas duales es que el valor objetivo de cualquier solución factible provee una cota del valor óptimo del problema primal.

Dados los problemas
(IP) $z^{IP} = \max\{c(x) : x \in X\}$ y (D) $z^{D} = \min\{b(u) : u \in U\}$.
Se dice que son un *par dual-débil* si $c(x) \leq b(u)$ para todo $x \in X$ y $u \in U$; y se dice que son un *par dual-fuerte* si $z^{IP} = z^{D}$.

¿Cómo obtener la pareja dual-débil de un problema?

Dualidad: dualidad-débil

La construcción del problema es a partir de una relajación a programación lineal.
Es un problema lineal que se construye a partir del problema dual de la relajación a programación lineal del problema entero.

Proposición (5)

El problema entero IP, $z^{IP} = \max\{c^\tau x : Ax \leq b, x \in \mathbb{Z}^n_+\}$, y el problema lineal D, $z^D = \min\{u^\tau b : u^\tau A \geq c^\tau, u \in \mathbb{R}^m_+\}$, forman un par dual-débil, donde $z^{IP} \leq z^D$.

Proposición (6)

Sea el problema FIP la relajación a programación lineal del conjunto factible discreto del problema IP, $z^{FIP} = \max\{c^\tau x : Ax \leq b, x \in \text{conv}(\mathbb{Z}^n_+)\}$.
Los problemas FIP y D forman un par dual-fuerte, donde $z^{FIP} = z^D$.

Dualidad: infactibilidad y dualidad-fuerte

Proposición (7)

Dado el par dual-débil de problemas IP y D:
1. Si D es no-acotado, entonces IP es no-factible.
2. Si $x^* \in X$ *y* $u^* \in U$ *cumplen* $c(x^*) = b(u^*)$*, entonces* x^* *es solución óptima de IP y* u^* *es solución optima de D.*

Cotas dual Lagrangeano y relajación a PL: ejemplo 1/6

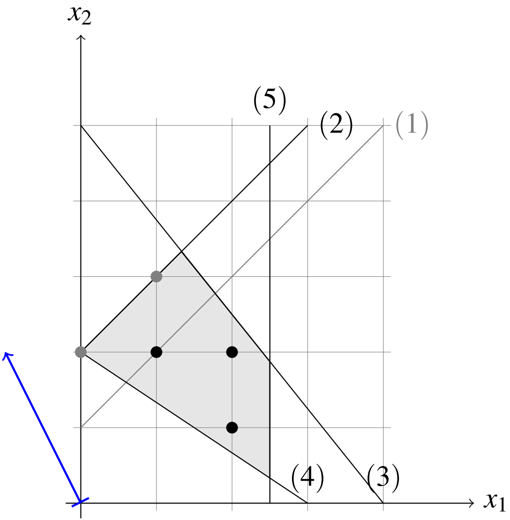
Dado el problema IP

$$
\begin{aligned}
z^{IP} := \max \quad & -x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 && (1) \\
& -x_1 + x_2 \leq 2 && (2) \\
& 5x_1 + 4x_2 \leq 20 && (3) \\
& 2x_1 + 3x_2 \geq 6 && (4) \\
& 2x_1 \leq 5 && (5) \\
& x_1, x_2 \geq 0 \text{ y enteras} && (6).
\end{aligned}
$$

Se relaja la restricción (1) con multiplicador u.
Sea X el conjunto de las soluciones factibles determinadas por el resto de las restricciones (2-6), $X = \{(0,2), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2)\}$.
Se tiene la formulación relajada

$$
\begin{aligned}
z(u) := \max \quad & -x_1 + 2x_2 + u(1 + x_1 - x_2) \\
\text{s.a} \quad & (x_1, x_2) \in X.
\end{aligned}
$$

Cotas dual Lagrangeano y relajación a PL: ejemplo 2/6



Cotas dual Lagrangeano y relajación a PL: ejemplo 3/6

A partir de la formulación relajada y los elementos de X se tiene que

$$\begin{aligned} z(u) := \max \quad & -x_1 + 2x_2 + u(1 + x_1 - x_2) \\ \text{s.a} \quad & (x_1, x_2) \in \{(0,2), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2)\}. \end{aligned}$$

Lo que es equivalente al máximo de un conjunto de funciones lineales de u

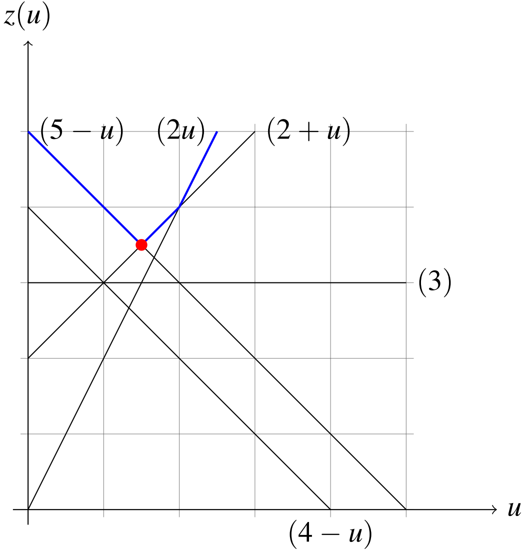
$$z(u) := \max\{4 - u, 3, 5 - u, 2u, 2 + u\}.$$

Entonces la cota más ajustada de dicho máximo se obtiene mediante el problema D,

$$\begin{aligned} z^D := \min \quad & z(u) := \quad \max\{4 - u, 3, 5 - u, 2u, 2 + u\} \\ \text{s.a} \quad & u \geq 0. \end{aligned}$$

Donde su óptimo se da en la intersección de $\{5 - u, 2 + u\}$, por lo que $u^* = \frac{3}{2}$ con $z^D = \frac{7}{2}$.

Cotas dual Lagrangeano y relajación a PL: ejemplo 4/6



Cotas dual Lagrangeano y relajación a PL: ejemplo 5/6

El problema D forma un par dual-fuerte con el problema FIP

$$
\begin{aligned}
z^{FIP} := \max \quad & -x_1 + 2x_2 \\
\text{s.a} \quad & -x_1 + x_2 \leq 1 \\
& x \in \text{conv}(X);
\end{aligned}
$$

el cual tiene solución optima $x^*_{FIP} = (\frac{3}{2}, \frac{5}{2})$ con valor $z^{FIP} = \frac{7}{2}$.

Por otra parte, la relajación a programación lineal del problema IP, tiene solución optima $x^*_{LP} = (\frac{16}{9}, \frac{25}{9})$ con valor óptimo $z^{LP} = \frac{34}{9}$.
Además, se tiene la solución optima del problema IP, $x^*_{IP} = (1, 2)$ con valor óptimo $z^{IP} = 3$.

Finalmente, se tiene que $z^{LP} \geq z^D \geq z^{IP}$, $\frac{34}{9} \geq \frac{7}{2} \geq 3$, respectivamente.

Cotas dual Lagrangeano y relajación a PL: ejemplo 6/6