

11 MODELOS EMPÍRICOS

En muchos casos la deducción de un modelo a partir de las leyes fundamentales no es posible o da lugar a excesivas complejidades. Es frecuente entonces recurrir a modelos denominados “empíricos”, que si bien funcionan como “caja negra” en el sentido en que desconocemos las leyes que gobiernan el proceso, si pueden reproducir el comportamiento del mismo, al menos dentro de los límites dados por las condiciones en las que fueron deducidos. Para ello hay que conocer los valores de las variables de entrada y de salida que se quieren relacionar, proponer una relación matemática (sencilla) y finalmente encontrar el valor de los parámetros en función de algún criterio de ajuste entre los valores que predice el modelo y los experimentales.

Regresión lineal

Si queremos relacionar linealmente la variable de entrada u con la variable de salida y , nuestro modelo calculará para cada valor de entrada u_i un valor

$$Y_i = \beta_1 + \beta_2 u_i + \epsilon_i$$

Donde β_1 y β_2 son los parámetros a ser estimados y ϵ_i es el error para cada punto. La idea es minimizar la suma de los cuadrados de los errores para N puntos

$$S = \sum_{i=1}^N \epsilon_i^2 = \sum_{i=1}^N (Y_i - \beta_1 - \beta_2 u_i)^2$$

lo cual genera los valores óptimos β_1 y β_2 de modo que las predicciones del modelo están dados por

$$\hat{y} = \hat{\beta}_1 + \hat{\beta}_2 u$$

De la minimización surge que el cálculo de los parámetros está dado por

$$\hat{\beta}_1 = \frac{S_{uu}S_y - S_{uy}S_u}{NS_{uu} - (S_u)^2}$$

$$\hat{\beta}_2 = \frac{NS_{uy} - S_uS_y}{NS_{uu} - (S_u)^2}$$

donde

$$S_u \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N u_i$$

$$S_{uu} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N u_i^2$$

$$S_y \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N Y_i$$

$$S_{uy} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^N u_i Y_i$$

El criterio de minimización de cuadrados puede extenderse a más de una variable de entrada o de salida y a funciones de las variables de entrada tales como polinomios o exponenciales, por ejemplo. En ese caso

$$y = \sum_{j=1}^p \beta_j X_j + \epsilon$$

donde X_j son las p funciones de la variable de entrada u . Se trata ahora de minimizar

$$S = \sum_{i=1}^N \left(Y_i - \sum_{j=1}^p \beta_j X_{ij} \right)^2$$

o escrito en forma matricial

$$S = (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{X}\boldsymbol{\beta})$$

donde

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_N \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_p \end{bmatrix} \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} X_{11} & \cdots & X_{1p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ X_{N1} & \cdots & X_{Np} \end{bmatrix}$$

Y los valores óptimos de los parámetros se obtienen según

$$\hat{\boldsymbol{\beta}} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

Siempre y cuando exista la matriz inversa que aparece en la expresión. Notar que la matriz \mathbf{X} comprende las funciones de u , esto es, si por ejemplo $y = \beta_1 + \beta_2 u + \beta_3 u^2 + \epsilon$, entonces $X_1 = 1$, $X_2 = u$, $X_3 = u^2$. Si el número de datos es igual al número de parámetros (esto es $N = p$) hay una única solución para la estimación de parámetros. Si $N > p$ el método de mínimos cuadrados da la solución que minimiza la suma de los cuadrados de las desviaciones entre los puntos experimentales y las predicciones del modelo (ver ejem11.1).

Regresión no lineal

Sea un modelo no lineal respecto a los parámetros que escribiremos en forma genérica

$$y = f(u_1, u_2, u_3, \dots, \beta_1, \beta_2, \beta_3, \dots)$$

También se puede escribir una suma de cuadrados a minimizar:

$$\min_{\beta_j} S = \sum_{i=1}^N (Y_i - \hat{y}_i)^2$$

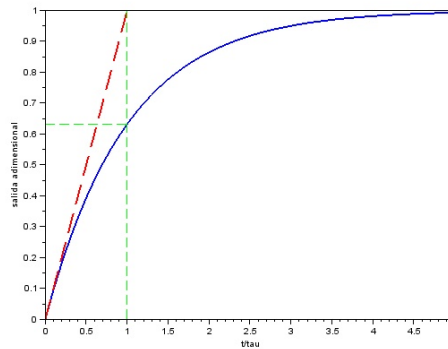
para encontrar las estimaciones óptimas de los parámetros del modelo (ver ejem 11.1).

Ajuste gráfico

Modelos de primer orden – Se pueden obtener modelos empíricos realizando un ensayo con un escalón en la entrada y registrando la salida. Si queremos ajustar a un modelo de primer orden la curva de salida debe ser tener el formato correspondiente a $1 - e^{-t/\tau}$ y a tiempo infinito debe alcanzar un salto Δy para un escalón aplicado a la entrada de altura ΔU

- *Estimación de la ganancia:*
$$k = \left. \frac{y(t)}{\Delta U} \right|_{t \rightarrow \infty} = \frac{\Delta y}{\Delta U}$$

- *Estimación de la constante de tiempo:* Se puede hacer identificando el valor de tiempo en el cual la respuesta vale 0.632 del valor final: $y(\tau) = k \Delta U [1 - e^{-1}] = 0.632 k \Delta U$



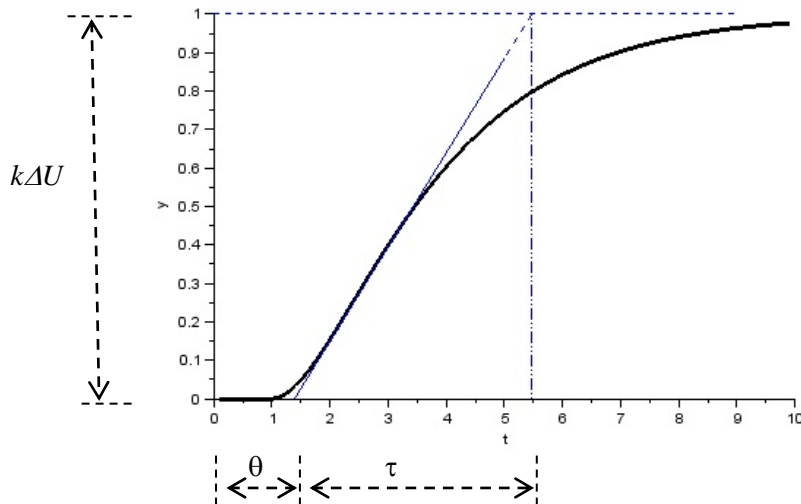
O bien evaluando

$$\frac{dy}{dt} = \frac{k \Delta U}{\tau} e^{-t/\tau}$$

en $t = 0$:
$$\left. \frac{dy}{dt} \right|_{t=0} = \frac{k \Delta U}{\tau}$$

Modelos de primer orden con tiempo muerto

En este caso se traza la pendiente en el punto de inflexión:



El punto de corte con el eje determina el delay θ y el punto de corte con la asíntota determina τ tal como se vio en el caso anterior.

Adicionalmente, se han propuesto métodos aproximados en función del tiempo para dos porcentajes de la respuesta determinados; por ejemplo Sundaresan y Krishnaswamy sugieren

$$\theta = 1.3t_{35.3\%} - 0.29t_{85.3\%} \qquad \tau = 0.67 (t_{85.3\%} - t_{35.3\%})$$

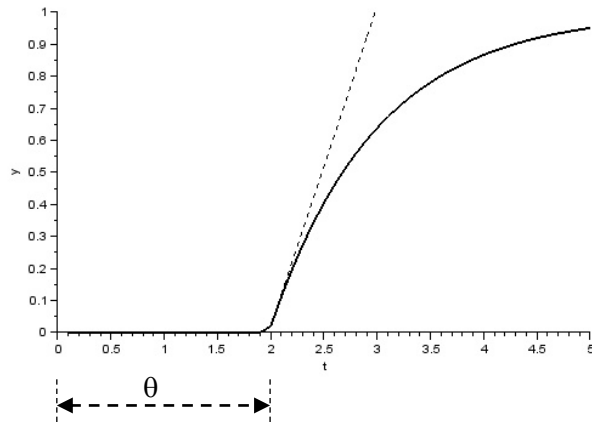
donde $t_{35.3\%}$ es el tiempo en el que se alcanza el 35.3% del salto de la curva de respuesta, etc.

Bequette sugiere $\tau = 1.5 (t_{63.2\%} - t_{28.3\%})$ $\theta = t_{63.2\%} - \tau$

Modelos de tipo integrador más tiempo muerto Una de las principales limitaciones de los métodos anteriores es el tiempo que hay que esperar para determinar la ganancia del proceso. Por eso a veces se recurre a modelos de tipo integrador más tiempo muerto, cuya respuesta inicial es muy similar a los de primer orden más tiempo muerto:

$$y(s) = \frac{ke^{-\theta s}}{s}$$

Cuya respuesta es $t < \theta, \quad (t) = 0$
 $t > \theta, \quad (t) = k\Delta(t - \theta)$

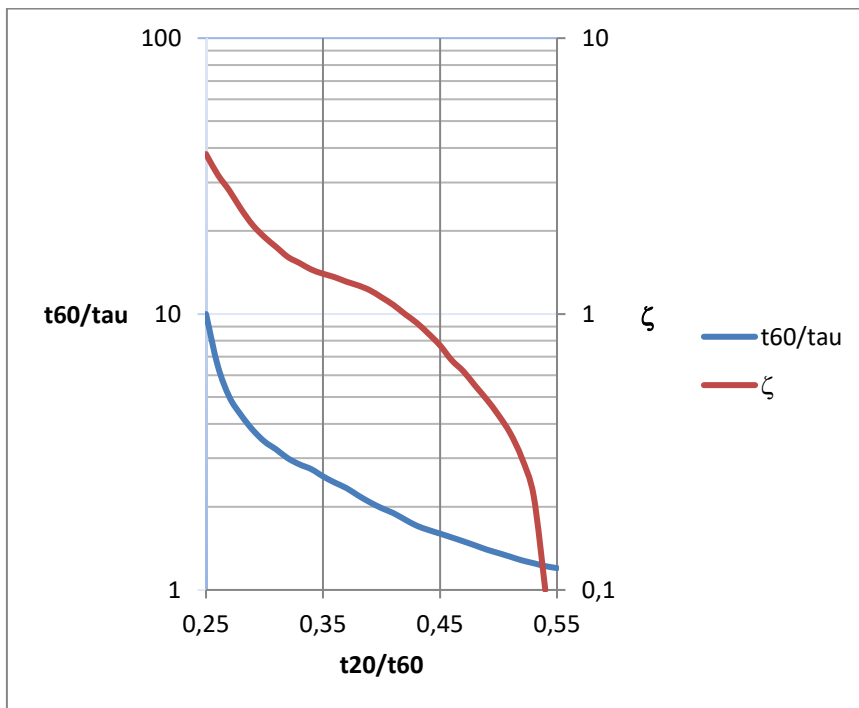


Por lo que la ganancia se puede hallar de la pendiente: $k = pendiente / \Delta u$

Modelos de segundo orden - Para un modelo de tipo

$$g(s) = \frac{K}{\tau^2 s^2 + 2\zeta\tau s + 1}$$

Smith desarrolló un método basado en las respuestas a 20% y 60% para calcular los parámetros.



Modelos discretos e identificación de parámetros

En general tendemos a formular nuestros modelos en términos continuos y estos dan origen a ecuaciones diferenciales. No obstante ciertos sistemas físicos se dan en forma discreta, o el muestreo es en forma discreta. Además, con el desarrollo de la computación digital cobran más importancia los modelos discretos, que dan lugar a ecuaciones “en diferencias”.

Sea por ejemplo una ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(y, u)$$

donde y es la variable de salida y u la variable de entrada. Numéricamente se puede aproximar a

$$\frac{dy}{dt} \cong \frac{y(k) - y(k - 1)}{\Delta t}$$

de modo que

$$\frac{y(k) - y(k - 1)}{\Delta t} \cong f(y(k - 1), u(k - 1))$$

$$y(k) = y(k - 1) + \Delta t \cdot f(y(k - 1), u(k - 1))$$

Este tipo de expresión “por recurrencia” permite calcular el valor en la iteración k conociendo el valor en el paso anterior.

Por ejemplo, para un modelo de primer orden

$$\tau \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = K u(t)$$

la ecuación por diferencias correspondiente es

$$\tau \frac{y(k) - y(k - 1)}{\Delta t} + y(k - 1) = K u(k - 1)$$

rearrreglando

$$y(k) = \left(1 - \frac{\Delta t}{\tau}\right) y(k - 1) + \frac{K \Delta t}{\tau} u(k - 1)$$

La exactitud de esta última solución está influenciada por el tamaño del intervalo; en general cuanto menor Δt mayor es la exactitud pero se necesita mayor capacidad de cálculo y también se pueden generar problemas numéricos. Sin embargo es posible

desarrollar modelos discretos que no tengan problemas de error. Supongamos que en la ecuación diferencial original durante el intervalo $(k-1)\Delta t \leq t \leq k\Delta t$ la entrada se mantiene constante en $u(t) = u[(k-1)\Delta t]$, partiendo del valor previo $y[(k-1)\Delta t]$. La solución analítica en $t = k\Delta t$ es

$$y(k\Delta t) = (1 - e^{-\Delta t/\tau})K u[(k-1)\Delta t] + e^{-\Delta t/\tau} y[(k-1)\Delta t]$$

O escrito en forma más compacta

$$y(k) = e^{-\Delta t/\tau} y(k-1) + K[1 - e^{-\Delta t/\tau}]u(k-1)$$

Esta última da la solución *exacta* de la ecuación diferencial en los instantes de muestreo cuando la entrada es constante en cada intervalo.

En general cuando una ecuación diferencial lineal de orden p se convierte a discreta, resulta una ecuación en diferencias de orden p . Por ejemplo para un modelo de segundo orden

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{K(\tau_a + 1)}{(\tau_1 + 1)(\tau_2 + 1)}$$

resulta un modelo discreto (también conocido como autorregresivo con entrada externa o ARX) del tipo

$$y(k) = a_1 y(k-1) + a_2 y(k-2) + b_1 u(k-1) + b_2 u(k-2)$$

donde

$$\begin{aligned} a_1 &= e^{-\Delta t/\tau_1} + e^{-\Delta t/\tau_2} \\ a_2 &= -e^{-\Delta t/\tau_1} e^{-\Delta t/\tau_2} \\ b_1 &= K \left[1 + \frac{\tau_a - \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_1} + \frac{\tau_2 - \tau_a}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_2} \right] \\ b_2 &= K \left[e^{-\Delta t(1/\tau_1 + 1/\tau_2)} + \frac{\tau_a - \tau_1}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_2} + \frac{\tau_2 - \tau_a}{\tau_1 - \tau_2} e^{-\Delta t/\tau_1} \right] \end{aligned}$$

Llamando \bar{u} e \bar{y} a los nuevos estados estacionarios después de un cambio en escalón de u (siempre trabajando con variables desviación) se llega a

$$\bar{y} = a_1 \bar{y} + a_2 \bar{y} + b_1 \bar{u} + b_2 \bar{u}$$

por lo que la ganancia del sistema puede calcularse como

$$K = \frac{\bar{y}}{\bar{u}} = \frac{b_1 + b_2}{1 - a_1 - a_2}$$

Lo atractivo de los modelos discretos es que se pueden estimar los parámetros directamente a partir de datos de entrada y salida en un procedimiento basado en la regresión lineal y que se denomina “identificación del sistema”. Por ejemplo, supongamos que queremos conocer los valores de los parámetros de la ecuación de segundo orden anterior. Definiendo

$$\beta^T = [a_1 \ a_2 \ b_1 \ b_2]$$

$$x_1 = y(k-1) \quad x_2 = y(k-2) \quad x_3 = u(k-1) \quad x_4 = u(k-2)$$

Minimizando la suma de los cuadrados de los residuos se tiene que

$$\hat{\beta} = (\mathbf{X}^T \mathbf{X})^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{Y}$$

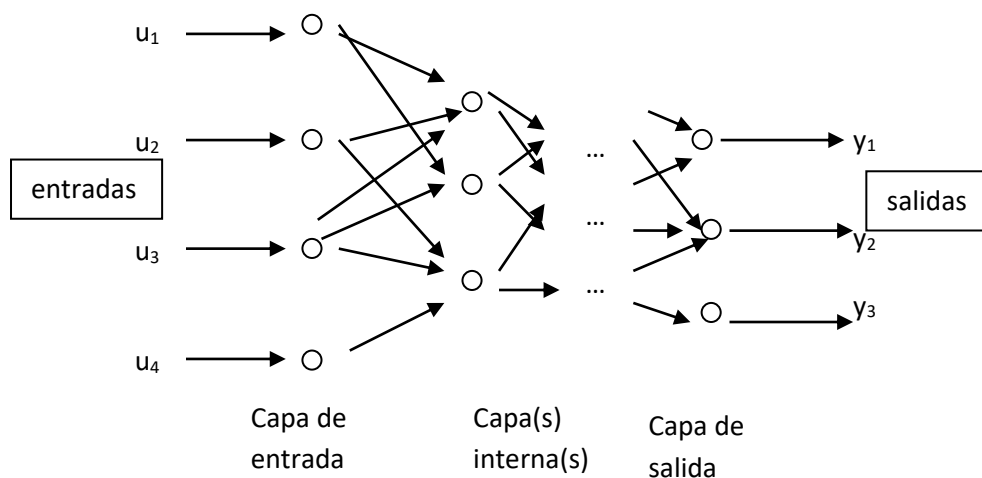
(ver ejem11.2). Obtenidos los parámetros de la función discreta se puede escribir directamente la función de transferencia en el dominio “z” (el equivalente al dominio de Laplace pero en discreto):

$$g(z) = \frac{b_1 z + b_2}{z^2 - a_1 z - a_2}$$

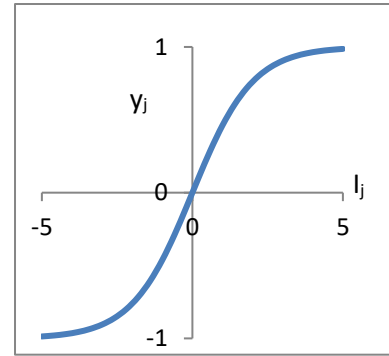
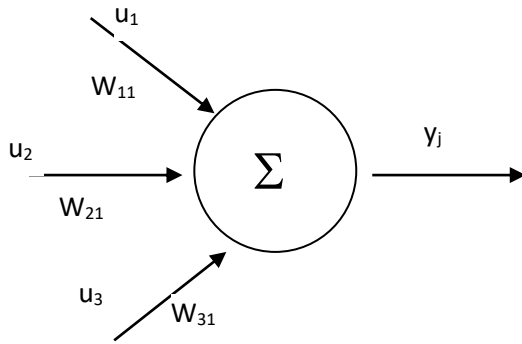
Redes neuronales

Consiste en una forma de modelado empírico que se inspira en las conexiones de las neuronas en el cerebro. Las entradas u y las salidas y son conectadas a través de varias capas de “neuronas” o nodos que se interconectan entre sí.

Las señales provenientes de las neuronas adyacentes se combinan entre sí teniendo en cuenta pesos relativos y generan una salida calculada mediante una función más o menos arbitraria. Esos pesos relativos deben estimarse ajustando los datos experimentales de entrada y salida en lo que se llama “entrenamiento” de la red.



Por ejemplo pueden usarse relaciones como:



$$I_j = \sum_{i=1}^n W_{ij} u_i \quad y_j = \frac{1 - e^{-I_j}}{1 + e^{-I_j}}$$

Si se conocen datos de entrada y salida (que se correspondan entre si), pueden “entrenarse” la red para ajustar los coeficientes o pesos relativos en las neuronas. Después de que la red se “entrenó”, para lo cual usa una cantidad considerable de datos experimentales, se usan más datos para “validar” el modelo, esto es verificar que las predicciones corresponden con estos nuevos datos experimentales. Una vez validado el modelo puede utilizarse para predecir cómo va a reaccionar el sistema frente a las distintas entradas.