PRÁCTICO 8

Cálculo 3- año 2014.

A menos que se indique lo contrario, las superficies cerradas y acotadas están orientadas con la normal exterior.

1. Probar que el volumen de la región V es igual a las siguientes integrales de superficie:

$$\iint_{\mathcal{S}}(x,0,0) = \iint_{\mathcal{S}}(0,y,0) = \iint_{\mathcal{S}}(0,0,z) = \frac{1}{3}\iint_{\mathcal{S}}(x,y,z)$$

2. Calcular el volumen encerrado por la superficie cerrada, acotada, parametrizada por

$$\begin{cases} x &= u & -2 \leq u \leq 2 \\ y &= 3(2-|u|)\cos v & 0 \leq v \leq 2\pi \\ z &= (2-|u|)\sin v & \end{cases}$$

   Respuesta: 16π

3. Calcular el volumen encerrado por un elipsoide de semiejes con longitudes a, b y c.

   Resp: $4\pi abc/3$.

4. Calcular, primero directamente, y luego usando el teorema de Gauss en el espacio, la integral

$$\iint_{\mathcal{S}}(y-z, x+2y+, x-z)\, dS$$

   sobre la superficie del cubo de centro en el origen, de lados de longitud 2, paralelos a los ejes coordenados, y orientado con la normal exterior.

   Resp: 8.

5. *a*) Demostrar que si X es un campo solenoidal en $\mathbb{R}^3 - (0,0,0)$ entonces el flujo de X a través de cualquier esfera que deje a $(0,0,0)$ en su interior es igual al flujo de $\vec{X}$ a través de cualquier superficie cerrada, acotada, sin borde que deje a $(0,0,0)$ en su interior (es decir cualquier superficie que sea frontera de un abierto acotado de $\mathbb{R}^3$ que contiene al punto $(0,0,0)$).

   b) Hallar el flujo del campo vectorial qX/r^3, siendo q una constante, $X = (x,y,z)$, y $r^2 = x^2+y^2+z^2$, a través del cubo de centro el origen y arista a, con la normal orientada positivamente al exterior. Se sugiere usar que el flujo de ese campo a través de la esfera de radio a centrada en el origen es $4\pi q$.

   Resp.: $4\pi q$

6. Aplicando la fórmula de Gauss, hallar el flujo del vector $(3x, -2y, 5z)$ a través de una esfera cualquiera de radio 2, normal exterior. Resp.: 64π.

7. Sea X un campo solenoidal definido en todo $\mathbb{R}^3$. Se sabe que

$$X(x, y, 1) = (\sqrt{1 + x^2 + y^2} \cos x, \quad e^x, \quad 0)$$

$$X(x, y, 0) = (\sqrt{1 + x^2 + y^2} \cos x, \quad e^x, \quad y - 1)$$

   Calcular el flujo de X a través de la superficie lateral del cilindro $x = \cos(u),\ y = \sin(u),\ z = v, \quad 0 \leq u \leq 2\pi,\ 0 \leq v \leq 1$ con la normal que apunta hacia el eje del cilindro.

   Resp: π

8. Sea X un campo solenoidal en $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0, 0, 0)\}$. Su primera componente $A(x, y, z)$ verifica $A(1, y, z) = 3(y^2 + z^2)$, $A(-1, y, z) = -3(y^2 + z^2)$.

   En los planos $|y| = 1$ se anula la segunda componente del campo X, y en los planos $|z| = 1$ se anula la tercera componente.

   Hallar el flujo de X a través de la esfera de centro $(0, 0, 0)$ y radio 5. Hallar el flujo de X a través de la esfera $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = 9$.

   (Sugerencia: Considerar la superficie de un cubo con centro en el origen, y lados paralelos a los ejes de longitud 2 y aplicar el ejercicio 5.)

   Respuesta: 8.

9. Sean X y W dos campos definidos en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{(x_0, y_0, z_0)\}$, tales que divX = divW en Ω. Probar que son iguales los flujos de X y W a través de cualquier superficie cerrada y acotada, contenida en Ω que no encierre al punto (x_0, y_0, z_0).

   Probar que el flujo de X a través de una superficie compacta $\mathcal{S}$, contenida en Ω que encierra al punto (x_0, y_0, z_0) es igual al flujo de W a través de $\mathcal{S}$ más el flujo de $X - W$ a través de la esfera de centro (x_0, y_0, z_0) y radio 1.

   Consideremos la esfera $(x - 1)^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Sea

$$X = \left(\frac{y}{r^2}, \frac{1 - x}{r^2}, 3z \right)$$

   Hallar el flujo de X a través del elipsoide $(x - 1)^2 + 4y^2 + 9z^2 = 1$ y a través del elipsoide $4x^2 + y^2 + z^2 = 1$. Sugerencia:aplicar lo anterior con $W = (0, 0, 3z)$.

   Resp.: $2\pi/3, 2\pi$

10) Buscar la condición que tienen que cumplir las constantes a, b, c para que el flujo del vector $X = (ax \cos y \cos z, b \sin y \cos z, c \cos y \sin z)$ sea nulo a través de la esfera de centro el origen y radio unidad.

Resp: $a + b + c = 0$.

11. Calcular primero directamente, y luego aplicando el Teorema de Gauss, el flujo del vector $X = (0, 0, 5)$ a través de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$.

Respuesta: $\pm 5\pi R^2$.

12. Sean $U = x + y + z$ y $V = e^x + y$, funciones escalares, y sea $\mathcal{S}$ la superficie del cubo con vértices $(0, 0, 0)$, $(0, 0, 1)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 1, 1)$, $(1, 0, 0)$, $(1, 0, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 1, 1)$, orientada con la normal exterior n. Sea R la región encerrada por la superficie $\mathcal{S}$. Calcular:

$$I_1 = \iiint_R U \triangle V \, dx\, dy\, dz, \qquad I_2 = \iint_{\mathcal{S}} U \frac{dV}{dn} dS \quad \text{y}$$

$$I_3 = \iiint_R V \triangle U \, dx\, dy, dz$$

Aplicando las identidades de Green, hallar:

$$I_4 = \iiint_R \nabla U \cdot \nabla V \, dx\, dy\, dz \qquad \text{y} \qquad I_5 = \iint_{\mathcal{S}} V \frac{dU}{dn} dS$$