PRÁCTICO 7

Cálculo 3 - 2014.

A menos que se indique lo contrario, las superficies cerradas y acotadas están orientadas con la normal exterior.

1. Calcular en cada caso el flujo del campo $\nabla \times F$ a través de la superficie S.
   (a) $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + 3z^2 = 1; \; z \leq 0\}$ y $F(x, y, z) = (y, -x, zx^3y^2)$.
   (b) $S = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 16; \; z \geq 0\}$ y $F(x, y, z) = (x^2 + y - 4, 3xy, 2xz + z^2)$.
2. Calcular la circulación de $X = (-y^3, x^3, -z^3)$ a lo largo de la curva C, siendo C la intersección del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ y el plano $x + y + z = 1$, orientado en el sentido contrario que las agujas del reloj.
3. Calcular la circulación de $X = (3x^2y - 3z + e^x \sin z, x^3, e^x \cos z - 3x)$ a lo largo de la curva $x = \cos t$, $y = \sin t$, $z = \cos t$, $0 \leq t \leq 2\pi$. Resp.: 0
4. Un globo aerostático tiene la forma de esfera de radio R truncada de modo que la sección inferior (truncada) es una circunferencia de radio $R/4$. Los gases calientes escapan por la cubierta porosa del globo con un campo de velocidad $V(x, y, z) = \nabla \times F$ donde $F(x, y, z) = (-y, x, 0)$. Si $R = 5$ calcule la tasa de flujo del volumen de los gases que pasan a través de la superficie.
5. Sea X un campo de clase C^1 definido en todo $\mathbb{R}^3$, tal que su primera componente es idénticamente nula, y su segunda componente $B(x, y, z)$ verifica $B(0, y, 0) = 3y^2$, $\;B(1, y, 0) = 8y^3$.

   Hallar el flujo del rotor de X a través de la superficie con borde, parametrizada por:
   $$\begin{cases} x = u & 0 \leq u \leq 1 \\ y = v & 0 \leq v \leq 1 \\ z = uv(1-u)(1-v) & \end{cases}$$
   orientada con la normal con tercera componente positiva.

   Respuesta: 1
6. Siendo A un vector constante, y $X = (x, y, z)$, probar que la circulación de $\vec{A} \wedge X$ a lo largo de una curva cerrada es igual a dos veces el flujo de A a través de un casquete de superficie limitado por la curva.
7. Probar que para cualquier campo vectorial A definido en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, el flujo de $\nabla \wedge \vec{A}$ a través de cualquier superficie acotada, cerrada y orientable,

sin borde, contenida en Ω es nulo. Esto vale incluso aunque el interior de la superficie no esté totalmente contenido en Ω, y no pueda aplicarse el teorema de Gauss. Sugerencia: descomponer la superficie en casquetes con borde, limitados por curvas cerradas. Aplicando el teorema de Stokes a cada casquete, el flujo del rotor de A en cada uno es igual a la circulación de A a lo largo de su curva borde, con orientación apropiada, de forma que la suma de las circulaciones en esas curvas se cancelan.

8. Aplicar el ejercicio anterior para deducir que si X es un campo de rotores en $\Omega = \mathbb{R}^3 - \{(0,0,0)\}$, entonces el flujo de X a través de cualquier esfera contenida en Ω, aunque deje $(0,0,0)$ en su interior, es nulo.

9. Considerar el campo

$$X = \left(\frac{x(1-4x^2-4y^2)}{x^2+y^2}, \frac{y}{x^2+y^2}, 4z \right)$$

   (a) Verificar que X es solenoidal en $\Omega = \mathbb{R}^3 \setminus \{x=0, y=0\}$. Calcular el flujo de X a través de la superficie cilíndrica $\{x^2+y^2=1, z \in [-1,1]\}$, y a través de la superficie esférica $\{x^2+y^2+z^2=1, z \geq 0\}$

   Resp: -4π y -4π

   (b) Demostrar que el flujo de X a través de cualquier superficie compacta sin borde contenida en Ω es cero. (Sugerencia:Toda superficie compacta sin borde contenida en Ω tiene su interior contenido en Ω, porque Ω es todo el espacio menos una recta. Aplicar el Teorema de Gauss)

   (c) Demostrar que X es un campo de rotores en Ω. Sugerencia:Hallar el rotor de

$$\left(\frac{yz}{x^2+y^2}, 4xz - \frac{xz}{x^2+y^2}, 0 \right)$$