PRÁCTICO 6

Cálculo 3- año 2014.

1. Calcular la integral $\iint_{\mathcal{S}} f\, dS$ de la función escalar $f(x,y,z) = 2y(x^2+1)^{-1}(1+4z)^{-1/2}$ sobre la superficie
$$\mathcal{S} = \{z = x^2 + y^2, |y| < 1\}$$

2. Sea la función escalar $\varphi(x,y,z) = log(x^2+y^2)$ definida en el abierto $\Omega = \{(x,y,z)$ tal que $x^2+y^2 \neq 0\}$. Calcular el integral de φ sobre un cilindro de radio 1 y altura 1.

3. Hallar el flujo del campo vectorial $q\vec{X}/r^3$, siendo q una constante, $\vec{X} = (x,y,z)$, y $r^2 = x^2+y^2+z^2$, a través de la esfera de centro el origen y radio a, con la normal orientada positivamente al exterior. Resp.: $4\pi q$

4. Hallar el flujo del campo vectorial $\vec{X} = (x+y, y^2, y+z)$ sobre el cubo de centro el origen y arista a. Resp.: $2a^3$.

5. Calcular el flujo del vector $xz\vec{i} - y^2\vec{j} + xz\vec{k}$ a través de la superficie lateral del cilindro $x = Rcos(u)$, $y = Rsen(u)$, $z = v$, $0 \leq u \leq 2\pi$, $0 < v < 3$ normal orientada al exterior. Resp.: $9\pi R^2/2$.

6. Sea S la superficie cerrada que consta de la semi esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con $z \geq 0$ y su base $x^2+y^2 \leq 1$ y $z = 0$. Sea E el campo eléctrico definido por $E(x,y,z) = (2x, 2y, 2z)$. Encontrar el flujo eléctrico a través de S.

7. Sea V el campo de velocidad de un fluido descrito por $V(x,y,z) = (1,x,z)$ expresado en metros sobre segundos. Cuántos metros cúbicos de fluido cruzan por segundo la superficie, $x^2+y^2+z^2 = 1$ con $z \geq 0$.

8. ¿Cuál es la condición necesaria y suficiente que debe cumplir a, b y c para que el flujo del campo $X(x,y,z) = (ax^2, by^2, cz^2)$ a través de la esfera de centro el origen y radio 1 sea nulo?.

9. Calcular el flujo del rotor del campo vectorial $X(x,y,z) = (z-y, x-z, y-x)$ a través de la semiesfera $x^2+y^2+z^2 = 16$, $z \geq 0$ con la normal orientada tal que forma un ángulo agudo con el eje z.

10. Sea $\mathcal{S}$ una superficie orientada en $\mathbb{R}^3$, simétrica respecto al plano $z = 0$. Sea $\mathcal{S}_1$ la intersección de $\mathcal{S}$ con el semiespacio $z \geq 0$ y sea $\mathcal{S}_2$ su simétrica respecto al plano $z = 0$.

a. f es una función escalar tal que $f(x,y,-z) = -f(x,y,z)$. Probar que $\iint_{\mathcal{S}} f\, dS = 0$.

b. g es una función escalar tal que $g(x,y,z) = g(x,y,-z)$. Probar que $\iint_{\mathcal{S}} g\, dS = 2\iint_{\mathcal{S}_1} g\, dS$.

c. $\vec{X} = (a,b,c)$ es un campo tal que

$$\begin{array}{rcl} a(x,y,-z) & = & -a(x,y,z) \\ b(x,y,-z) & = & -b(x,y,z) \\ c(x,y,-z) & = & c(x,y,z) \end{array}$$

Probar que el flujo de $\vec{X}$ a través de $\mathcal{S}$ es cero.

d. $\vec{Y} = (a,b,c)$ es un campo tal que

$$\begin{array}{rcl} a(x,y,-z) & = & a(x,y,z) \\ b(x,y,-z) & = & b(x,y,z) \\ c(x,y,-z) & = & -c(x,y,z) \end{array}$$

Probar que el flujo de $\vec{Y}$ a través de $\mathcal{S}$ es el doble del flujo de $\vec{Y}$ a través de $\mathcal{S}_1$.

e. Hallar el flujo del campo

$$\vec{X} = (x^2 z^5, y^6 + z, x^3)$$

a través de la esfera de centro en el origen y radio 1, con la normal saliente.

Resp: parte e.) cero.