Práctico 5

Superficies parametrizadas. Cálculo 3 - año 2014

1. Determinar en qué puntos son regulares las siguientes superficies paramétricas:

a) $\begin{cases} x = 2u \\ y = u^2 + v \\ z = v^2 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = u^2 - v^2 \\ y = u + v \\ z = u^2 + 4v \end{cases}$.

2. Considerar las parametrizaciones $\varphi_1(u,v) = (u,v,0)$ y $\varphi_2(u,v) = \left(u^3, v^3, 0\right)$.

1. Probar que φ_1 y φ_2 son parametrizaciones del plano xy.

2. Probar que φ_1 describe una superficie paramétrica regular, pero φ_2 no. Observar que la noción de regularidad depende de la parametrización.

3. Probar que el conjunto $S = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : \ z = x^2 - y^2\right\}$ es una superficie regular y verificar que las siguientes son parametrizaciones de S:

1. $\varphi(u,v) = (u+v, u-v, 4uv)$; $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

2. $\varphi(u,v) = \left(ucosh(v), usenh(v), u^2\right)$; $(u,v) \in U = \{(u,v) : \ u \neq 0\}$.

4. Mostrar que $\varphi(u,v) = (v\cos u, v\sin u, au)$ con $a \neq 0$ $U = \{(u,v) : \ u > 0, \ v > 0\}$ es una parametrización y calcule su vector normal $N(u,v)$ y el plano tangente en el punto $(0,0,0)$.

5. Dada una esfera de centro en el origen y radio 2, hallar la ecuación del plano tangente en el punto $\left(1,1,\sqrt{2}\right)$ considerando la esfera como:

1. una superficie parametrizada por $\varphi\left(u,v\right) = \left(2\cos u \sin v, 2\sin u \sin v, 2\cos v\right)$;

2. un conjunto de nivel de la función $f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2$;

3. la gráfica de la función $g(x,y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.

6. Hallar la ecuación del plano tangente a la superficie parametrizada por $\varphi\left(u,v\right) = \left(u^2, u\sin e^v, \frac{1}{3}u\cos e^v\right)$ en el punto $(13,-2,1)$.

7. Dada $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diferenciable. Mostrar que los planos tangentes a la superficie determinada por la función $z = xf\left(y/x\right)$ con $x \neq 0$, en un punto dado, pasan por el origen.

8. Calcular los planos tangentes en el origen a las parametrizaciones siguientes:

1. $\varphi(u,v) = (r\sin u \cos v, r\sin u \sin v, r\cos u)$ elipsoide

2. $\varphi(u,v) = \left(au\cos v, bu\sin v, u^2\right)$ paraboloide elíptico

3. $\varphi(u,v) = \left(aucosh(v), busenh(v), u^2\right)$ paraboloide hiperbólico.

9. Dada el hiperboloide de ecuación $x^2 + y^2 - z^2 = 25$.

1. Hallar una parametrización del hiperboloide.
2. Hallar una expresión para la normal unitaria a esa superficie.
3. Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto $(a, b, 0)$ donde $a^2 + b^2 = 25$.
4. Probar que las rectas $r_1 : (a, b, 0) + t\,(-b, a, 5)$ y $r_2 : (a, b, 0) + t\,(b, -a, 5)$ están contenidas tanto en la superficie como en el plano tangente hallado en la parte anterior.

10. Hallar el área de la superficie parametrizada por $\Phi(\theta, \phi) = (\cos\theta \sin\phi, \sin\theta \sin\phi, \cos\phi)$ donde $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\phi \in [0, \pi]$.

1. ¿ Qué pasa si cambiamos el intervalo de ϕ por $\phi \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$? ¿ y por $\phi \in [0, 2\pi]$?
2. ¿ Por qué se obtienen respuestas distintas?

11. Sea $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ y sea D el disco unidad en el plano uv.

1. Hallar los coeficientes E, F y G.
2. Hallar el área de $\Phi(D)$.