Práctico 4

Cálculo 3 - año 2014

1. Sean $U=\mathbb{R}^2-\{(x,y):\ xy+1=0\}$ y $F:U\to\mathbb{R}^2$ tal que $F(x,y)=\left(\frac{1-y^2}{(1+xy)^2},\frac{1-x^2}{(1+xy)^2}\right)$.

1. Hallar todos los potenciales escalares de F en U.

2. Calcular $\int_C F$ a lo largo de una curva en U que una el punto $(1,1)$ con el $(3,2)$. [sol: -2/7]

2. Sean los puntos $p,q\in\mathbb{R}^2$, $p\neq q$, los abiertos $U=\mathbb{R}^2-\{p\}$, $V=\mathbb{R}^2-\{q\}$, $W=\mathbb{R}^2-\{p,q\}$ y los campos $X:U\to\mathbb{R}^2$, $Y:V\to\mathbb{R}^2$, $F:W\to\mathbb{R}^2$ tal que $F=X+Y$.

Se sabe que X e Y son irrotacionales. Sean I_p la circulación de X a lo largo de una curva cerrada simple en sentido antihorario que rodea a p e I_q la circulación de Y a lo largo de una curva cerrada simple en sentido antihorario que rodea a q.

1. Sea $C\subset W$ una curva cerrada simple, en sentido antihorario, probar que:

   a) $\int_C F=0$ si C no rodea a p ni a q.

   b) $\int_C F=I_p$ si C rodea a p pero no a q.

   c) $\int_C F=I_p+I_q$ si C rodea a p y a q.

2. Calcular $\int_C F$ en función de I_p e I_q si $C\subset W$ es una curva cerrada que de 3 vueltas en sentido antihorario p y 2 vueltas en sentido horario a q.

3. Probar que el conjunto de valores que toma $\int_C F$ para las distintas curvas cerradas $C\subset W$ es $\{nI_p+mI_q:\ n,m\in\mathbb{Z}\}$.

4. Probar que si $I_p=I_q=0$ entonces F es de gradientes en W.

3. Calcular $\int_C\left(\frac{-3y}{(x-1)^2+y^2}+\frac{2y}{(x+1)^2+y^2}\right)dx+\left(\frac{3(x-1)}{(x-1)^2+y^2}-\frac{2(x+1)}{(x+1)^2+y^2}\right)dy$ siendo $C\subset\mathbb{R}^2-\{(1,0),(-1,0)\}$ una curva cerrada que dé 3 vueltas en sentido antihorario alrededor de $(-1,0)$ y 2 vueltas en sentido horario alrededor de $(1,0)$.

4. Se consideran los campos $X=\left(\frac{y^2-(x-1)^2}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2},\frac{-2(x-1)y}{\left[(x-1)^2+y^2\right]^2}\right)$, $Y=\left(\frac{-y}{(x-1)^2+y^2},\frac{(x-1)}{(x-1)^2+y^2}\right)$, $Z=\left(\frac{(y-4)^2}{8}+\frac{y}{(x-1)^2+y^2},\frac{1-x}{(x-1)^2+y^2}\right)$, definidos en $U=\mathbb{R}^2-\{(1,0)\}$ y las circunferencias $C_0=\left\{x^2+y^2=2\right\}$, $C_1=\left\{(x-1)^2+y^2=2\right\}$ y $C_2=\left\{x^2+(y-4)^2=2\right\}$ recorridas una sola vez en sentido antihorario.

1. Hallar las circulaciones de X,Y y Z a lo largo de las 3 circunferencias (sugerencia: hallar los rotores de los 3 campos y sólo calcular directamente sus circulaciones a lo largo de C_1 así como también la circulación de $\left(\frac{(y-4)^2}{8},0\right)$ en las 3 curvas.

2. Uno de los 3 campos dados es de gradientes en U otro no es de gradientes en U pero si lo es en $V=\{(x,y):\ x>2\}$, y el restante no es de gradientes en ningún subconjunto abierto de U. Identificar cada campo.

5. Sea $\mathbf{X}(x,y,z) = (2xyz + \sin x, x^2 z, x^2 y)$. Encontrar un potencial escalar para $\mathbf{X}$.

6. Sea el campo de fuerzas gravitatorio, definido para $(x,y,z) \neq (0,0,0)$:

$$\mathbf{X}(x,y,z) = -\frac{(x,y,z)}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Demostrar que el trabajo realizado por la fuerza gravitatoria cuando una partícula se mueve desde (x_1,y_1,z_1) a (x_2,y_2,z_2) depende sólo de los radios $R_1 = \|(x_1,y_1,z_1)\|$ y $R_2 = \|(x_2,y_2,z_2)\|$.

7. Demostrar que si f función y $\mathbf{X}$ campo diferenciables, entonces:

$$\nabla \wedge (f\mathbf{X}) = \nabla f \wedge \mathbf{X} + f\nabla \wedge \mathbf{X}$$

es decir, $rot(f\mathbf{X}) = \nabla f \wedge \mathbf{X} + frot(\mathbf{X})$

8. Calcular el rotor del campo

$$\mathbf{X}(x,y,z) = \frac{(yz, -xz, xy)}{x^2+y^2+z^2}$$

9. Demostrar que el campo $\mathbf{X}(x,y) = (y\cos x, x\sin y)$ no es de gradientes.

10. Sea $r(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, demostrar que:

1. $$\nabla\frac{1}{r} = -\frac{(x,y,z)}{r^3}$$

2. $$\nabla \wedge (x,y,z) = \mathrm{rot}(x,y,z) = (0,0,0)$$

11. Determinar cuál de los siguientes campos es un campo de gradientes, y en los casos apropiados, hallar un potencial escalar

1. $\mathbf{X}(x,y) = (x,y)$
2. $\mathbf{X}(x,y) = (xy, xy)$
3. $\mathbf{X}(x,y) = (x^2+y^2, 2xy)$