Práctico 3

Cálculo 3 - año 2014

1. En cada caso, halle la integral de línea $\int_C f\, ds$ de la función escalar f sobre la curva C.

(a) $f(x,y) = xy$; C la elipse $x^2/4 + y^2 = 1$ orientada en sentido anithorario.

(b) $f(x,y,z) = (x+y)z$; C la curva $\gamma(t) = (t,t,t^2)$, $t \in [0,1]$. [sol: a. 0]

2. Calcule las integrales de línea (i) $\int_C 2xy\, dx - x^2\, dy$ y (ii) $\int_C 2xy\, dx + x^2\, dy$ a lo largo de cada una de las siguientes curvas que van del origen $O = (0,0)$ al punto $A = (2,1)$.

(a) Segmento OA. (b) Quebrada OBA, $B = (2,0)$. (c) Quebrada OCA, $C = (0,1)$.

(d) Parábola con eje Oy. (e) Parábola con eje Ox. [sol: i. $4/3, -4, 4, 0, 12/5$; ii. $4, 4, 4, 4, 4$]

3. Calcule $\int y\, dx + z\, dy + x\, dz$ a lo largo de las curvas dadas a continuación. En cada caso la curva se dará como la intersección de dos superficies expresadas en forma implícita.

(a) $(x-1)^2 + (y-1)^2 + z = 2$; $x = y$, desde $(0,0,0)$ a $(2,2,0)$. [sol: a. 2; b. -2π; c. $-\pi$]

(b) $x + y = 2$; $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x+y)$, en sentido horario mirando desde el origen.

(c) $z = xy$; $x^2 + y^2 = 1$, en sentido antiorario mirando desde $(0,0,+\infty)$.

4. En cada caso calcule la circulación $\int_C F$ del campo F a lo largo de la curva C.

(a) $F(x,y) = (x^2 - 2xy, 2xy - y^2)$; C el arco de la parábola $y = x^2$ que va desde $(1,1)$ a $(2,4)$.

(b) $F(x,y) = (2a - y, x)$; C el primer arco de la cicloide $x = a(t - \operatorname{sen} t)$, $y = a(1 - \cos t)$, $t \in [0,\pi]$, recorrido según t decreciente.

(c) $F(x,y) = (x^2 + y^2, x^2 - y^2)$; C el arco de la curva $y = 1 - |1 - x|$ que va de $(0,0)$ a $(2,0)$.

(d) $F(x,y,z) = (2xy, y^2 + z, z^2)$; C el segmento de recta de $(1,3,2)$ a $(2,2,3)$.

(e) $F(x,y,z) = (z,x,y)$; C el arco de la hélice $x = \cos t$, $y = \operatorname{sen} t$, $z = t$ que va del punto $(1,0,0)$ al $(1,0,2\pi)$. [sol: a. 1219/30; b. $2\pi a^2$; c. 4/3; d. 29/6; e. 3π]

5. Probar que si $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es un campo C^1, $F(x,y) = (f(x,y), g(x,y))$ y $R \subset \mathbb{R}^2$ es un rectángulo cerrado de lados paralelos a los ejes coordenados, entonces

$$\int_{\partial R} f\, dx + g\, dy = \iint_R (g_x - f_y)\, dx\, dy,$$

donde el borde de R, ∂R, se orienta en sentido antihorario.

6. Considere la integral de línea $\displaystyle\int_C \frac{y(1-x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\, dx + \frac{x(1+x^2-y^2)}{(1+x^2+y^2)^2}\, dy.$

(a) Probar que la integral “no depende del camino”, solo de los puntos inicial y final de C.

(b) Calcular la integral para un camino que vaya del punto $(1,1)$ al $(3,2)$.

7. Sean $U = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ y $F\colon U \to \mathbb{R}^2$ el campo $F(x,y) = \left(\dfrac{y^2 - x^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2}, \dfrac{x^2 - y^2 - 2xy}{(x^2+y^2)^2} \right)$.

(a) Probar que $f(x,y) = \dfrac{x+y}{x^2+y^2}$ es un potencial escalar de F en U.

(b) Calcular la circulación de F a lo largo de la circunferencia de centro el origen y radio 1, orienta en sentido antihorario.

(c) Hallar la circulación de F a lo largo de la elipse $\alpha(t) = (2\cos t, 3 \operatorname{sen} t)$, $t \in [0, 2\pi]$.

8. Sea $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ el campo $F(x,y) = (y^2, x^2 - 2xy)$.

(a) Calcular la integral de línea $\int y^2\,dx + (x^2 - 2xy)\,dy$ desde el punto $(1,0)$ al $(0,1)$ a lo largo de: (i) el segmento de recta y (ii) el cuarto de cfa. $x^2 + y^2 = 1$. [sol: i. $-2/3$; ii. $-1/3$]

(b) ¿Es F un campo de gradientes?

(c) Encuentre ejemplos funciones reales $h(x)$ y $\varphi(x,y)$ tales que $\nabla\varphi(x,y) = h(x)F(x,y)$.

9. Probar que $F(x,y,z) = \vec{r}/\|\vec{r}\|^3$, con $\vec{r} = (x,y,z)$, es un campo de gradientes en $\mathbb{R}^3 \backslash \{(0,0,0)\}$.

10. Usando el teorema de Green calcular el área dentro de la elipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.